A bizonyítási képesség értelmezése és fejlődésének jellemzői iskoláskorban

Csíkos Csaba

PhD értekezés

témavezető: **Vidákovich Tibor**

Szegedi Tudományegyetem

„A kognitív kompetencia fejlődése és fejlesztése” doktori program

2000

Bevezetés

Mindannyiunk gondolkodásának fontos jellemzője, hogy képesek vagyunk állítások igazságát önmagunk és mások számára nyilvánvalóvá tenni. Egyes esetekben (ilyen például a Pitagorasz-tétel) az állítást az állítás nyilvánvalóvá tételével együtt tanuljuk meg, míg más esetekben nekünk kell az állítást is megfogalmazni, és azt is, hogy hogyan lehet eldönteni annak igazságát. Feltételezhető, hogy állítások igazságának igazolása során a memóriában elraktározódott tapasztalatok és már megismert bizonyítások felidézése mellett a gondolkodás olyan összetevői is működésbe lépnek, amelyek éppen azért vannak, hogy a memóriában meglévő ismereteket és már elsajátított képességeket az adott problémához alkalmazkodva irányítsák és működtessék.

A hétköznapi tapasztalat szerint a kisgyermekek a körülöttük lévő világról szóló állításaik legitimitását vagy a tapasztalatból, vagy egy felnőtt tekintélyéből merítik. Felnőttkorban is jellemző, hogy a számunkra kevésbé ismert területen nem kívánunk sem empirikus bizonyítékok után kutatni, sem logikus gondolatmenetet alkalmazva nyilvánvalóvá tenni egy állítást, hanem tekintélyelvű az érvelésünk. A jelentős különbség az a kisgyermek érveléséhez képest, hogy tudjuk, a tekintélyelvű érvelés kevésbé értékes, mint a példákkal alátámasztás és a logikus igazolás. A mi kultúrkörünkben a deduktív bizonyítások számítanak a legkifinomultabbnak. Az állítás igazságértékét alátámasztó, valószínűbbé tevő empirikus bizonyítások sok szempontból kevésbé értékesek.

A kutatásunk alapkérdése, hogy létezik-e, és ha igen, hogyan fejlődik egy olyan képesség-rendszerünk, amelynek funkciója állítások igazságértékének igazolása. Kiindulásként feltételeztük, hogy a filozófia, a matematika és a jogtudomány bizonyítás-fogalmából kiindulva megalkotható egy pedagógiai-pszichológiai bizonyítás-fogalom, amely az állítások igazságértékével kapcsolatos kognitív folyamatok modelljének alapjául szolgálhat. Már a kutatás elején fontos volt leszögeznünk, hogy a bizonyítási képességgel kapcsolatban nem a matematikai bizonyítások terén szerzett jártasságot kívánjuk vizsgálni. Erre a pedagógiai-pszichológiai bizonyítás-fogalomra és a kognitív képességek kutatásával kapcsolatos eredményekre épül a bizonyítási képesség mint többszintű hierarchikus képesség-rendszer modellje. A bizonyítási képességen belül két fontos al-komponensrendszert különböztetünk meg: bizonyítások értékelésének és bizonyítások konstruálásának képességét. A pedagógiai-pszichológiai bizonyítás-fogalomra és a bizonyítási képesség modelljére építve kidolgoztuk azokat az értékelési módszereket, amelyek lehetővé teszik a bizonyítási képesség komponenseinek értékelését.

A bizonyítási képesség fejlődését evolúciós hasonlattal írtuk le. Az egy időben különböző tartalmakon működő bizonyítási sémáink közül egyesek megerősítést nyernek, és így más tartalmakon is egyre gyakrabban kerülnek felhasználásra, míg más sémáink fokozatosan háttérbe szorulnak. A bizonyítási képesség fejlődését és a fejlesztés lehetőségeit ezért nagymértékben meghatározza az egyes bizonyítási sémák értékéről a tanulók felé áramló információ. Azt állítjuk tehát, hogy a fejlődés nagyrészt belső szelekció eredménye, amelyre nagy hatással van az iskola értékrendszere.

A bizonyítási képesség fejlődésével kapcsolatos alapvetésünk szerint a kisgyermek, aki elsősorban tekintélyelvű és empirikus bizonyításokat használ, az enkulturáció folyamatában megtanulja, hogy a tekintélyelvű bizonyítások a legkevésbé értékesek. A gondolkodás fejlődése ugyanakkor lehetővé teszi, hogy egyre több tartalmi területen deduktív bizonyításokat adjon. Pedagógiai szempontból a bizonyítási képességgel kapcsolatban két fontos témakörben fogalmazunk meg kérdéseket: 1) Az egyes életkori szakaszokban a gyermek hogyan ítéli meg a bizonyítástípusok értékességét? Mennyiben vezethető vissza az iskolai nevelés-oktatás hatásrendszerére, hogy a tekintélyelvű bizonyítások veszítenek értékükből és a deduktív bizonyításokat ítélik legértékesebbnek? 2) Melyik életkori szakaszban válik lehetővé egyes deduktív bizonyítási formák alkalmazásának képessége? Köthető-e valamelyik tartalmi területhez a deduktív bizonyítások megjelenése?

A bizonyítási képességet a kutatás kezdeteitől fogva többdimenziós (többszintű) képességrendszerként értelmeztük. Ez a megközelítés nem egyeztethető össze azokkal a törekvésekkel, amelyek a bizonyítási képességet a deduktív következtetési szabályokkal végzett meta-tevékenységként, vagy matematikai tételek levezetésében való jártasságnak tekintik. Ahogyan azt bizonyítani fogjuk, a bizonyítási képesség egyes komponensei nagyon különböző tartalmakon hasonló működéssel jellemezhetők, más komponensei ugyanakkor erősen tartalom-specifikusak. Megmutatjuk majd, hogy a bizonyítási képesség mérésére hivatott feladatokon nyújtott teljesítményt számos olyan tényező befolyásolja, amely nem a kognitív szférához tartozik. Hangsúlyozni fogjuk azt is, hogy a bizonyítási típusokkal kapcsolatos tanári értékítéleteknek jelentős szerepe lehet a tanulók bizonyítási képességének fejlődése szempontjából.

A pedagógiai értékelés terén a nemzetközi tendencia az, hogy egyre hangsúlyosabbá válik a magasabb szintű kognitív képességek mérése. Nyilvánvaló, hogy ez a mérési módszerek újragondolására készteti a kutatókat. Ebbe a kontextusba helyezve a kutatást, azt mondhatjuk, hogy a bizonyítási képesség értékelése egy jó példa lehet arra, hogy a magasabb szintű kognitív képességek mérése sokszínű mérési eljárások és adatelemezési módszerek alkalmazását igényli.

1. A bizonyítási képesség fejlődésének és fejlesztésének elméleti alapjai

A bizonyítási képesség fejlődésének vizsgálata interdiszciplináris megközelítést igényel. Bár valamennyi vonatkozó kérdés megválaszolása túllépné a disszertáció kereteit, több részterületen igyekeztünk felkutatni a releváns szakirodalmat, és kutatási hipotéziseket megfogalmazni. A szakirodalmi áttekintés anyagát ez a fejezet tartalmazza. A téma megközelítése először a bizonyításfogalom tisztázását igényli: a filozófiai, matematikai és jogi bizonyításfogalmakra építve egy lehetséges pedagógiai bizonyításfogalmat vázolunk föl. A bizonyítási képesség értelmezéséhez a következő részben a gondolkodási képességekkel kapcsolatos tudásunkat tekintjük át, és a bizonyítási képesség mint többszintű, képesség jellegű tudásrendszer pedagógiai-pszichológiai értelmezésére vállalkozunk. A szakirodalmi áttekintés harmadik részében a bizonyítási képesség fejlődéséről lesz szó, nagy hangsúlyt helyezve arra, hogy a fejlődés viszonyítási alapja kultúrába ágyazott. Ezután a bizonyítási képesség fejlesztésének problémái kapcsán elsősorban a matematikai bizonyításokkal kapcsolatos fejlesztő kísérleteket elemezzük, majd megkeressük a képességfejlesztés általános alapelvei közül azokat, amelyek egy többszintű képességrendszer esetében az eredményes fejlesztéshez hozzájárulhatnak. Végül a bizonyítási képesség értékelésének problémái kapcsán külső értékelési kritériumokat keresünk a bizonyítási képesség méréséhez.

1.1. Bizonyításfogalmak

Az értelmező szótárak a bizonyítással kapcsolatban három területet említenek: filozófiai, matematikai és jogi bizonyításokat. Ebből adódóan első feladatunk e három bizonyításfogalom kritikai elemzése azzal a céllal, hogy az általunk használt pedagógiai-pszichológiai bizonyításfogalmat megfelelően elhelyezhessük a különféle tudományterületek értelmezései között.

1.1.1. A filozófiai bizonyításfogalom

A bizonyítási képesség megismeréséhez elengedhetetlenül szükséges a filozófiai bizonyításfogalmak áttekintése. A szükségesség alátámasztásához nem elegendő (bár szükséges), hogy a szótárakban a bizonyítással kapcsolatban filozófiai, matematikai és jogi bizonyításokról van szó – illő tehát kitekintést tenni. Sokkal inkább indokolja a filozófiai bizonyításfogalmak áttekintésének szükségességét, hogy a filozófia (természeténél fogva) az ember által tapasztalt dolgok átfogó és szisztematikus megértésére törekszik. Az „átfogó" kifejezés egyrészt széleskörűséget jelent, ami abban nyilvánul meg, hogy a tudományok között a filozófia érdeklődési köre a legkiterjedtebb. Az átfogó megismerési igény másik dimenziója a megértés mélysége, amely a dolgok végére járásban nyilvánul meg. A filozófia gyakran kétségbe von olyan kijelentéseket, amelyeket más tudományok axiómának tekintenek (*Graham*, 1993). Ezért ha nem akarjuk azt a hibát elkövetni, hogy kritikai elemzés nélkül elfogadjuk valamelyik bizonyításfogalmat a bizonyítási képesség kutatásának kiindulópontjaként, és szeretnénk nyilvánvalóvá tenni, hogy akár másképpen is lehetne értelmezni a bizonyításokat, akkor a filozófiatörténet bizonyításelméleti fejezeteihez kell fordulnunk.

A bizonyítások értelmezése átível a filozófiatörténeten; mondhatjuk, hogy minden jelentős filozófiai iskolának megvolt a maga bizonyításfogalma. A filozófiai bizonyítások alapkérdése, hogy a világról szerzett tudásunk igazságát lehet-e igazolni, és ha igen, akkor mi módon. A két probléma összekapcsolódik, mivel mind a szkeptikusoknak, akik tagadják az igazság bizonyításának lehetőségét, mind a valamilyen bizonyítási módszer érvényessége mellett lándzsát törőknek ítéletet kell mondani az egyes bizonyítástípusokról is. Célkitűzésünknek megfelelően a filozófiatörténeti állomásokat nem csupán kronológiai, hanem pedagógiai-pszichológiai szempontból tekintjük át. Ebből a szempontból különösen fontosak a tekintélyelvű, az induktív és a deduktív bizonyítások.

Az egyik legalapvetőbb bizonyítási típus, amelyet még azok is használnak, akik egyébként negatívan ítélik meg, a tekintélyi érvelés. Ennek értékességéről *Aquinói Szent Tamás* a Summa Theologiae I. kérdés 8. szakaszában azt írja: „A tekintélyi érvelés nem fér össze a tudomány magasrendűségével, hiszen a tekintélyi elv a leggyengébb - *Boëthius* szerint." (*Aquinói Szent Tamás*, 1994, 47. o., eredeti: 1266-73) Ha ezzel az érvvel elintéznénk a tekintélyi érvelés értékességének kérdését, az a tekintélyi érvelés feltűnő alkalmazása lenne. A tekintélyelvű érvelés sok esetben teljesíti a pszichológiai jellegű meggyőzés kritériumot, amellyel kapcsolatban *Tarski* (1990, 380. o.) a következőket írta: „a XIX. század utolsó éveiig a bizonyítás fogalma elsődlegesen pszichológiai jellegű volt. A bizonyítás olyan szellemi tevékenységnek számított, amelynek célja meggyőzni önmagunkat és másokat egy mondat igazságáról."

A tekintélyelvű érvelés meghaladását jelenti az empirikus bizonyítás, amennyiben az empirikus bizonyítások jobban kielégítik a meggyőzés pszichológiai kritériumát. Ennek egy fajtája a példákkal alátámasztás, amely a tekintélyelvvel kiegészülve meggyőzőbbé teszi az állítást. A példákkal alátámasztás mellett a görög filozófiában fokozatosan teret nyertek a deduktív bizonyítások is (*Földesi*, 1967). *Arisztotelész* érdeme az, hogy felismerte, a logikának bizonyos fokig el kell vonatkoztatnia az ítéletek tartalmától. Az egyik fontos logikai szabály, a kizárt harmadik elve tette lehetővé a már az éleai filozófusok által alkalmazott indirekt bizonyításokat.

Az ógörög bizonyításelmélet adja a keretet az Elemekhez, amelyben a matematikai állításokat egyszerűbb, már nem bizonyított állításokra vezetik vissza: axiómákra és posztulátumokra. Az axiómák és posztulátumok között Euklidesz korában már nem volt lényegi különbség. A posztulátumok korábban az éleai filozófia mozgásellenes téziseinek ellenpontozását jelentették, és a körző és vonalzó segítségével történő bizonyítások megengedhető tevékenységeit foglalták össze (*Szabó*, 1978).

Ha most a fentiekben pedagógiai-pszichológiai szempontból fontosnak nevezett három bizonyítástípusra gondolunk, akkor akár a görögökkel lezárhatnánk a filozófiai bizonyításfogalmak áttekintését, mert már 2500 éve adottnak vehető a tekintélyelvű, az induktív és deduktív bizonyítások hierarchikus rendszere. Mi történt a bizonyításelmélet terén az elmúlt 2500 évben? A leggyakrabban visszatérő kérdés az volt, hogy hogyan lehetnek érvényesek a deduktív bizonyítások. Ha ugyanis a deduktív bizonyítás során egy állítás igazságértékét visszavezetjük más állításokra, akkor előbb-utóbb olyan állításokhoz kell jutnunk, amelyek igazságához nem fér kétség. Mi biztosíthatja az axiómák igazságát? A klasszikus görög filozófia tagadja az induktív bizonyítás létjogosultságát azzal is, hogy az axiómákat *nem lehet* deduktív módon igazolni, és *nem szabad* induktív úton (*Földesi*, 1978).

„A középkori filozófia átviszi a filozófiai bizonyítás területére az arisztotelészi alapelveket." (*Földesi*, 1978, 43. o.) *Aquinói Szent Tamás* a II. kérdés 2. szakaszában kétféle bizonyítástípusról beszél azzal kapcsolatban, hogy mit lehet egyáltalán bizonyítani. „A bizonyítás kétféle lehet. Az egyikben az okból, vagyis az önmagában elsődlegesből következtetünk az okozatra. Ezt propter quid bizonyításnak nevezzük. A másikban az okozatból, vagyis a számunkra elsődlegesből következtetünk az okra. Ennek quia bizonyítás a neve. Amikor ugyanis valamely okozat számunkra ismertebb, mint az ok, az okozat által jutunk el az ok ismeretére" (73. o.)

A polgári filozófia bizonyításelméletei a XVII. századtól a XIX. század közepéig sokfélék: racionalisztikus, deduktív versus empirikus, kísérleti induktív, és egy másik síkon: teljes bizonyosságot követelő álláspontoktól a bizonyításelméleti szkepticizmusig terjed a skála (*Földesi*, 1978). *Descartes* fogalmazta meg a gondolatot, hogy a deduktív eljárás csak szükséges a helyes bizonyításhoz, de kell még hozzá az axiómák hitelessége. Az axiómákat vagy tapasztalati-induktív úton kell alátámasztani, vagy valami bizonyításmentes hitelességre van szükség. Az alapigazságoknak evidenseknek kell lenniük, evidenciájuk az értelem intuíciójából ered. *Descartes* jelentősége, hogy „nem marad meg mereven a deduktív bizonyítás keretei között, hanem megpróbálja a tapasztalatot mint kiegészítő elvet beépíteni bizonyításelméletébe" (*Földesi*, 1978, 53. o.). Az ókori görögök deduktív bizonyításairól az a véleménye, hogy azok nem a megismerés módszerei. Az Értekezés a módszerről függelékében így ír erről:

> „A geometriai módon való írást illetően két dolgot különböztetek meg, tudniillik a bizonyítás rendjét és elvét... A bizonyítás elve azonban kétféle: az egyik ti. az analízis, a másik a szintézis útján történő bizonyítás." (*Descartes*, 1637/1993, 80. o.) „A régi geométerek a szintézis elvét használták. Definíciók, posztulátumok, axiómák, teorémák és problémák hosszú sorának alkalmazásával jut el a következtetéshez... A régi geométerek egyedül ez utóbbi elvet alkalmazták írásaikban, ámbár nem azért, mintha a másik teljességgel ismeretlen lett volna előttük, hanem azért (már amennyire meg tudom ítélni), hogy azt - mivel oly nagyra becsülték - mint valami titkot tartsák meg maguknak." (*Descartes*, 1667/1993, 81. o.)

Az újkori filozófiai gondolkodók munkáiban különös hangsúlyt kap az induktív és deduktív bizonyítások értelmezése, viszonyuk meghatározása. Miután nyilvánvalóvá vált, hogy mindkét bizonyítási fajtára szükség van, különböző álláspontok születtek arról, hogy a bizonyítási processzusban mikor kerüljön előtérbe egyik vagy másik.

Bacon rámutat arra, hogy a deduktív módszer önmagában nem vezet új felfedezésekre. Ugyanakkor kiemeli, hogy az induktív módszert helyesen kell alkalmazni ahhoz, hogy a tudomány fejlődjék. A Novum Organumban így ír: „Két módja van a megismerésnek: érvek által és tapasztalat által. Az érvek következtetésre vezetnek, ám az érvek nem nyújtanak hitelességet, nem oszlatják el kételyeinket, hogy lelkünk megnyugodjék az igazság szemléletében, míg csak azt az igazságot nem leljük fel tapasztalat útján." (*Bacon*, 1620/1995) Ebben a gondolatban megjelenik az induktív eljárások szükségességének kimondása - az axiómák igazolásának igényével. Nem arról van itt szó, hogy esetek felsorolásából induktív következtetéssel felismerünk valamilyen szabályszerűséget, mert szerinte itt nem szabad megállni. "Ha a megfelelően rendbe szedett tények tömegeit úgyszólván felsorakoztattuk szemeink előtt, még akkor se térjünk át azonnal új tények vagy gyakorlati találmányok kutatására..." (*Bacon*, 1620/1995, 69. o.) Fontosabbnak tartja azt, hogy a tapasztalatból - helyes szabályok alapján - új axiómákat szűrjünk le. A megfigyelésekkel kapcsolatosan viszont felhívja a figyelmet arra, hogy a tapasztalás bizonytalan és pontatlan lehet. "Ha viszont meghatározott törvény igazgatja sorjában és folytonosan a tapasztalást, többet remélhetünk a tudománytól" (*Bacon*, 1620/1995, 68 . o.) Megjelenik itt az a gondolat, hogy a tapasztalati úton megállapított törvényszerűségek és a tapasztalás kölcsönösen meghatározzák egymást.

Leibniz szerint - és ez újnak számít *Descartes* és *Bacon* gondolataihoz képest - a bizonyításelmélet nem érhet el igazán nagy eredményeket megfelelő logikai alátámasztás nélkül (*Földesi*, 1978). Ennek a leibnizi gondolatnak az a jelentősége, hogy a logikai tényezők előtérbe kerülésével a bizonyítással és igazsággal kapcsolatos elméleti problémák az axiómák igazságával kapcsolatban vetődnek föl. Azonban ez a filozófiai alapelv csak jóval később, a modern szimbolikus logika, majd a meta-matematika megjelenésével vált meghatározóvá.

Hume a bizonyításokkal kapcsolatban szkeptikus álláspontot képvisel: negatív választ ad arra a kérdésre, hogy van-e olyan biztonságos alap, amelyre az induktív tényeken alapuló deduktív bizonyítás épülhet.

Kant a matematika egyik alapelvét (egymást kizáró ellentétes tartalmú tételek nem lehet egyaránt igazak) átviszi a bizonyítások területére. *Kant* egy kivétellel indirekt módon bizonyítja tételeit.

Az axiómák és tételek circulus vitiosusának problémája *Hegel* filozófiájában tisztázódott. *Hegel* ugyanis az axiómákat nemcsak a többi tudomány segítségével tartja bizonyíthatónak, hanem egy tudományon belül is. Szerinte ugyanis az axiómák nem elsődleges termékei egy tudomány fejlődésének, hanem igen gyakran csak a fejlődés magasabb fokán jönnek létre. Megoldás: Az axiómákból levezethető tételek azért bizonyítják az axiómák igazságát, mert ők maguk igazolásukat máshonnan (pl. más tudományokból) nyerik. Az axiómát magát is bizonyíthatják más tudományok eredményei. Ez a gondolat előképe az axióma-rendszerek matematikai jósága vizsgálatának.

Hegel újszerűn közelíti meg az induktív és deduktív bizonyítások problematikáját. Míg az előző filozófusok a két eljárást egymással szembeállítva vizsgálták, Hegel mint egymást kiegészítő és feltételező metódusokat tekinti ezeket, amelyek külön-külön önmagukban nem vezethetnek eredményre.

John Stuart Mill szerint az indukció minden bizonyítás nyílt vagy rejtett alapeleme. Hegellel szemben az axiómák hitelét nem más tudományokból származtatja, hanem az emberi tapasztalatból. A szillogizmusokat vizsgálva megállapítja, hogy minden dedukció indukciótól függ. Igazán új ismeretek csak nem teljes indukcióval szerezhetők. *Mill* szerint minden deduktív következtetés az induktívtól függ. Míg a nem-teljes indukció új ismeretet nyújt, addig a deduktív következtetésben a zárótétel csupán megismétli azt, ami a főtételben már kifejeződött.

Témánk szempontjából rendkívül fontos az induktív és deduktív bizonyítások fogalmának tisztázása. Egy szillogisztikus következtetési sémán keresztül érzékeltethetjük, hogy a következtetéseinkben egyszerre kell jelen lennie az egyestől az általános (indukció) és az általánostól az egyes (dedukció) felé haladásnak.

> „Az induktív következtetésben az egyestől az általánoshoz való haladás a közvetlen, viszont az ellenőrzés szempontjából az általánostól az egyesekhez érkezünk, amikor a terminus mediust alkotó egyesekre alkalmazzuk az általánost. Az univerzális következtetésekben ellenben közvetlenül az általánostól haladunk az egyeshez, de ugyanakkor az ellenőrzés révén a terminus minorban tükröződő tárgy, illetve tárgyak egyes vonásainak a tükrözésén keresztül is eljutunk az általános tulajdonságok rögzítéséhez.
>
> Pl. Minden fém vezeti az elektromosságot.
> A higany fém.
> A higany vezeti az elektromosságot." (*Szigetvári*, 1970, 193. o.)

A fém fogalma terjedelmileg általánosabb a higanyénál, azonban a következtetés helyességének vizsgálata során a higany-vonásokban fel kell tárnunk a fém-tulajdonságokat.

Az eddig áttekintett álláspontok nyitva hagyták a kérdést: Hogyan lehet eldönteni, hogy egy állítás bizonyítható vagy sem? *Tarski* (1990) azt állítja, hogy az igaz állítások és a bizonyítható állítások halmaza nem esik egybe. Vannak állítások, amelyek igazak, de nem bizonyíthatók. (Látható, hogy *Tarski* egy *Gödel* utáni álláspontot képvisel. *Gödel* tudományt megrengető felfedezéséről a matematikai bizonyításokról szóló részben lesz majd szó.)

A továbbiakban egy viszonylag rövid, de a bizonyításelmélet szempontjából nagyon fontos korszakban született gondolatokat tekintünk át. A *Mill* és *Gödel* közti időszakban a neopozitivista áramlathoz tartozó Bécsi Kör filozófusai egyrészt a bizonyíthatóság problémáját elemezték, másrészt élénken foglalkoztatta őket, hogy hogyan lehet meggyőződni az axiómák helyességéről. Bizonyíthatóság helyett a Bécsi Kör filozófusainál a *verifikálhatóság* és konfirmálhatóság válnak kulcsszóvá. Mindkét kifejezés arra a folyamatra vonatkozik, amely során egy állítás igazságértéke megállapítható. A Bécsi Kör verifikációs elméletének lényege: A mondat jelentése azonos azzal. az eljárással, amellyel az illető mondat igazságát vagy hamisságát megállapítjuk, azaz verifikációjának módjával. A verifikációnak két szakasza van: Az első még a nyelv közegében történik: a verifikálandó mondatot definíciók sorával *megfigyelési mondatokra* vezetjük vissza. A második szakaszban megállapítjuk, hogy a megfigyelési mondatok igazak-e (*Altrichter*, 1972).

A verifikálhatóság elvéről világosan ír *Schlick* a „Pozitivizmus és realizmus" tanulmányában: „Ha egy mondatot elvileg nem tudok verifikálni, vagyis abszolúte nem tudom,... mit kell tennem, hogy igaz vagy hamis voltát kiderítsem, akkor nyilván egyáltalán nem tudom, hogy mit állít a mondat." (*Schlick*, 1932-33/1972, 101. o.) „Azoknak a körülményeknek a megadása, amelyek között egy mondat igaz, ugyanaz, mint értelmének megadása, és semmi más." (*Schlick*, 1932-33/1972, 102. o.) Schlick munkásságának egyik központi gondolata, hogy különbséget szükséges tenni hamis és értelmetlen állítások között.

A megfigyelési mondatok - bizonyításelméleti szempontból - olyan állítások, amelyek igazsága a tapasztalat alapján nyilvánvaló, vagyis axiómaként szerepelnek a verifikáció során. *Hans Hahn* (1933/1972) a deduktív bizonyítások és a megfigyelési mondatok jelentőségét kiemelve azt írja: „...a tapasztalatból merítünk bizonyos tényeket, amelyeket természettörvényként fogalmazunk meg; de mivel a gondolkodás segítségével ragadjuk meg a valóságban uralkodó legáltalánosabb (logikai és matematikai természetű) törvényszerű összefüggéseket, ezért a megfigyeléssel feltárt tények alapján jóval szélesebb körben uralhatjuk a természetet, mint ahogy ténylegesen megfigyeltük." (*Hahn*, 1933/1972, 224. o.)

Hahn kiemeli (Leibnizhez hasonlóan) a logika alkalmazásának fontosságát: „Nyelvünk úgy van megalkotva, hogy bizonyos tételek állításával impliciten más tételeket is állítunk - de nem látjuk át azonnal, hogy így impliciten mi mindent állítottunk még: csak a logikai következtetések tudatosítják bennünk ezt." (*Hahn*, 1933/1972, 236. o.)

A Bécsi Kör egy másik nagy gondolkodója, *Carnap* „a verifikálhatóság elvét a konfirmálhatóság elvével ... cserélte föl." (*Forrai*, 1984, 108. o.) Egy mondatot akkor tekintünk konfirmálhatónak, ha megfigyelési mondatok pozitívan vagy negatívan hozzájárulhatnak konfirmációjához. (*Forrai*, 1984, 76. o.) A konfirmálhatóság elve annyiban más, mint a verifikálhatóság elve, hogy 1) nem követeli meg az igazságérték végleges megállapíthatóságát, és 2) csak meghatározott nyelvrendszer vonatkozásában bír határozott jelentéssel.

Carnap filozófiájában a megfigyelési mondatok helyett protokolltételek szerepelnek, amelyek tartalmi szempontból megfigyelési tételek, de meghatározott szintaktikai szabályoknak engedelmeskednek. Noha a protokolltételek felvételében szerepe van a konvenciónak is, végső soron megfigyelésen alapulnak. A protokolltételek felvétele a megfigyeléseket végző fizikus dolga (*Forrai*, 1984). „Az, hogy minden tudományos tételt képesnek kell lennünk racionálisan megalapozni, nem jelenti azt, hogy e tételeket racionálisan is kell felfedeznünk, azaz pusztán az értelemre hagyatkozva." (idézi *Forrai*, 1984, 12. o.) A tudomány racionalitását ezek szerint az *utólagos igazolás* hivatott biztosítani. Az utólagos bizonyítás gondolata hasonló ahhoz, amit *Hegel* mondott: Az axiómák helyességét más tudományok is igazolhatják.

A Bécsi Kör és napjaink között hidat képezve *Popper* és *Lakatos* témánkhoz kötődő gondolatait idézzük fel. *Popper* (1997) az indukciónak adott tudománytörténeti szempontból mérföldkőnek számító értelmezést a falszifikációs elv tanának kidolgozásával. *Hume*-hoz hasonlóan szkeptikus a megismerés lehetőségeit illetően: nincs végső tudományos igazság, az egymással versengő elméletek közül azt fogadjuk el, amelyet még nem cáfoltak meg. Ezért a megismerés útja nem igaznak vélt állítások verifikálása, hanem a falszifikálásra törekvés. *Lakatos* (1981) híres könyvében, a „Bizonyítások és cáfolatok"-ban tudománytörténeti példával illusztrálja, hogy egy állítás igazolása során a deduktivizmus akár a zsákutcát is jelentheti a heurisztikus gondolatmenettel szemben. *Lakatos* könyve - bár mondanivalóját illetően filozófiai indíttatású - a matematikatanítás módszertanának egyik alapműve lett.

1.1.2. A matematikai bizonyításfogalom

A matematika bizonyításfogalma (amely az évszázadok során sokszor a filozófiai bizonyításfogalommal karöltve fejlődött) hosszú történeti fejlődésen ment keresztül (*Hanna*, 1989, 1996; *Hanna* és *Jahnke*, 1993; *Markel*, 1994). A XIX. századig a pszichológiai jelleg volt meghatározó: Valamit világossá tenni, mások számára megmutatni olyan állítások, tények segítségével, amelyeket korábban igaznak fogadtunk el (*Tarski*, 1990). Ez a helyzet mára megváltozott, és a matematikai bizonyítások formalizálásának fontossága új tudományágak (matematikai logika, meta-matematika) kifejlődéséhez vezetett (*Barwise*, 1977; *Schütte*, 1977).

A század közepétől azonban többen is hangsúlyozták, hogy a merev formalizmus nem írja le a matematikai gondolkodás valódi természetét (*Lakatos* 1981; *Pólya* 1957, 1988). Ezekben a matematikatanítás módszertana számára is hasznos gondolatokat tartalmazó könyveikben *Pólya* és *Lakatos* felhívták a figyelmet a nem-deduktív módszerek matematikai alkalmazásának fontosságára. A matematika egyes modern irányzatai (mint például a *Szász* (1972) által vadhajtásnak nevezett intuicionista matematika) a matematika olyan felépítését is elképzelhetőnek tartják, amelyben nem lehet feltétel nélkül használni korábban megingathatatlannak tartott alapelveket: például végtelen halmazokkal kapcsolatos állítások esetén a kizárt harmadik elvét.

A matematikai bizonyítások története egyidős a matematika történetével. A bizonyításokban szereplő fontos elemek (definíciók, axiómák, posztulátumok, tételek) következetes használata az *Euklidesz* nevéhez kötött, de valójában hosszú évszázadok matematikai tudását akkumuláló Elemekben figyelhető meg először (i. e. 300 k.) Az *Arisztotelész* által rendszerbe foglalt kétértékű logikára épülő bizonyításfogalom a matematika szabatos, deduktív felépítését tette lehetővé.

Az ógörög matematika bizonyításfogalma azonban nem tudta rányomni bélyegét a következő századok matematikájára. Ennek magyarázatát abban látjuk, hogy a reneszánsz matematikája az arab matematikára épült, és nem az ógörögre. Az arab algebra viszont *Al-Khvarizmi* könyvén alapszik, amelyben a szerző „elfordult a 'görög tudományosságtól'", mivel az egyszerű emberek számára érthető könyvet akart írni (*van der Waerden*, 1977, 426. o.) Az elfordulás másik oka az volt, hogy „a szigorúan klasszikus stílusú írásbeli megfogalmazásnál ... a bizonyítások következetesek, de nem szuggesztívek." (*van der Waerden*, 1977, 428. o.)

A XIX-XX. század fordulóján vált egyre sürgetőbb igénnyé a matematikai bizonyítások szilárd alapra helyezése. Ebben jelentős szerepe volt a *Bolyai-Lobacsevszkij*-geometria XIX. századi megjelenésének, amely nyilvánvalóvá tette, hogy a geometria felépítésére többféle axiómarendszer is alkalmas. Később a halmazelmélet ellentmondásosságának feloldására irányuló erőfeszítések és a számfogalom tisztázására irányuló axiomatizáló törekvések együttesen vezettek a matematikai bizonyításelmélet megjelenéséhez. A bizonyításelmélet feladata axiómarendszerek ellentmondás-mentességének, függetlenségének vizsgálata halmazelméleti eszközök nélkül (*Ruzsa* és *Urbán*, 1966). Az ellentmondás-mentesség azt jelenti, hogy az adott axiómarendszerben ne lehessen egyidejűleg bizonyítható egy állítás és annak tagadása is. A függetlenség arra utal, hogy az axiómák ne függjenek egymástól; a lehető legkevesebb axiómából álljon a kiinduló állítások rendszere.

A XX. század elejére a matematikai bizonyításfogalom a pszichológiai jellegétől megszabadulva eljutott oda, hogy matematikai eszközökkel vizsgálhatóvá vált az, hogy egy állítás igazsága csak az axiómáktól és a következtetési szabály(ok) jóságától függ-e (*Tarski*, 1990).

A bizonyításelmélet a hangsúlyt oda helyezi, hogy a bizonyítandó állításokhoz felhasználható axiómák rendszerét elemezze. Ez a bizonyításelméleti felfogás összhangban van a Bécsi Kör álláspontjával, amely szerint a matematika tautologikus jellegű (Tudományos világfelfogás, 1929/1991; *Wittgenstein*, 1918/1989). Ebből következően többféle matematika létezhet egymás mellett; a lényeg, hogy az axiómarendszer ellentmondásmentes és független legyen.

Az axiómarendszer ellentmondás-mentességének és függetlenségének elemzéséhez szükséges meghatározni azt, hogy mit értünk a matematikában bizonyításon. A következő definíció ennél kisebb célt tűz maga elé: megmondjuk, hogy a matematikában mikor tekinthető egy állítás deduktív módon levezethetőnek (*Schütte*, 1977 alapján):

> A matematikában egy állítás deduktív módon való levezethetőségére egy induktív definíciót fogalmazunk meg:
> 1) Az axiómákat deduktív módon levezetettnek tekintjük.
> 2) Ha egy elemi következtetés premisszája deduktív módon levezethető, akkor a konklúzió is.
> 3) Az axiómákból véges sok lépésben kell eljutni a bizonyítandó állításhoz.

A bizonyítás a matematikában azt jelenti, hogy megmutatjuk (demonstráljuk) az állítás deduktív módon való levezethetőségét. Ez a gyakorlatban nem jelenti azt, hogy minden egyes állítást visszavezetünk axiómákra, csupán azt kell demonstrálni, hogy az lehetséges lenne. Bourbaki szerint a matematikus a valóságban „általában megelégszik azzal, hogy a leírást olyan alakra hozza, melyben a matematikai tapasztalata és érzéke már sugallják, hogy a formalizált nyelvre való áttérés már csak rutinkérdés." (idézi *Trosztnyikov*, 1981, 179. o.) Egy másik fontos tényező, hogy a bizonyítások szerepe nem kizárólag az, hogy az állítás igazságát bizonyítsák, hanem az, hogy a fogalmak, korábban ismert tételek kapcsolatait megvilágítsák, a megértést elősegítsék.

Az axiómarendszerek vizsgálatával úgy tűnt, hogy a matematika biztos talajra építhet. 1931-ben azonban *Gödel* megmutatta, hogy a *Russell* és *Whitehead* Principia Mathematica művében szereplő axiómarendszer ellentmondástalansága nem bizonyítható az axiómarendszer keretein belül (*Ruzsa*, és *Urbán*, 1966). A Gödel-tétel más axiómarendszerekre is igaz, és ez a matematikába vetett hit megingásához vezetett. Erre az időszakra datálódik az intuicionista matematika megjelenése, amely a bizonyításokban kevesebb eszközt engedett meg, ezáltal azt remélve, hogy az eszközeivel bizonyított állítások biztosabban igazak.

Gödel úgynevezett nem-teljességi tételének következménye az a szkepticizmus, amely a mai matematikai filozófiában is megfogalmazódik: „Ha a bizonyítás-fogalom egy lépésről lépésre történő érvényes dedukciót is jelentene, mindig lehetséges kritikát megfogalmazni a rendszer ellentmondás-mentességét, a relevanciáját vagy a közlés módját illetően" (*Tymoczko*, 1986).

Gödel tételéből következik, hogy az ellentmondás-mentességet csak egy másik, átfogóbb axiómarendszerben lehet bizonyítani. Egyelőre viszont nincs a halmazelméleti axiómarendszernél átfogóbb. Vagyis minden olyan bizonyítás, amely a halmazelmélet axiómarendszerére épül, kritika tárgyát képezheti. A halmazelmélet axiómái közül különösen a kiválasztási axióma az, amelynek evidenciáját sokan nem fogadják el, és csak azt a bizonyítást tartják értékesnek, amely a kiválasztási axióma felhasználása nélkül készült. A kiválasztási axiómát nem elfogadó matematikusok (a konstruktivisták) álláspontja szerint: „A matematikát úgy értelmezhetjük, mint abszolút potenciális meggyőző erővel rendelkező érvelések összességét." (*Trosztnyikov*, 1981, 265. o.)

A deduktív axiomatikus matematika más irányú meghaladását jelenti az experimentális matematika. Követői elismerik, hogy az irányzat részben nélkülözi a deduktivitás szigorát, ám egyes problémák vizsgálatára hatékony eszközt jelenthet a fizikai experimentalizmushoz hasonló - általában számítógéppel támogatott - kísérletezés. A kísérletek baconiak, abban az értelemben, hogy nem szolgai megfigyelésről van szó, hanem valamely elmélet keretébe ágyazva történik az adatok interpretálása (*Borwein, Borwein, Girgensohn* és *Parnes*, 1996).

Egy újabb XX. századi bizonyítás-típus, amely a hagyományos deduktivista bizonyításfogalom felülvizsgálatát teheti szükségessé, a számítógéppel támogatott bizonyítás. A híres négyszín-sejtést számítógép segítségével bizonyították be, sokak ellenérzését kiváltva ezzel. *Halmos* (1990, idézi *Hersh*, 1993) szerint ez nem jó bizonyítás, mert nem láttatja, hogy *miért* igaz a tétel. A jó bizonyítás megfelelő fogalmakat használva nem lehet túlságosan hosszú. *Halmos* véleménye szerint 100 év múlva a négyszín-tétel elsőéves hallgatók gyakorló feladatává válik, amely a megfelelő fogalmak felhasználásával néhány oldalon bizonyítható lesz.

A számítógépes bizonyításokkal kapcsolatban felvetődő problémák közül megemlítjük *Hersh* (1993) véleményét, mely szerint a számítások végrehajtásához szükséges idő fizikai határt szab a matematikai tételek és bizonyítások számára. Ha tehát elismernénk, hogy csak a teljesen formalizált bizonyítás az igazi, akkor - a leggyorsabb számítógépek teljesítményét alapul véve is - elismernénk, hogy létezik a matematikai ismeretek mennyisége számára egy felső korlát - más szóval a matematika véges. Látható, hogy itt egy elméleti problémáról van szó. A matematika gyakorlatát vajmi keveset befolyásolhatja, hogy egy év alatt legfeljebb 10^{20} vagy 10^{40} db tételt lehet bebizonyítani. Nem valószínű ugyanakkor, hogy az emberiség kimondaná: A matematikai ismereteknek létezik felső határa. A számítógépes bizonyításokkal kapcsolatban jelentősebb gyakorlati probléma az, hogy 1) sok közülük érdektelen, 2) a hasznosak kiválogatásához mindenképpen szükség van az emberre, 3) nem a matematikai megértés szempontjából alapvető tételek a legrövidebbek (*Trosztnyikov*, 1981).

A matematikai bizonyításokkal kapcsolatos újabb probléma, hogy a matematikusok körében elsősorban a tétel relevanciája a fontos. Így fordulhatott elő, hogy 1976-ban egy év alatt 200 000 tételt publikáltak, és az esetek mintegy felében hibás a bizonyítás (*Hanna*, 1989).

1.1.3. A jogi bizonyításfogalom

A bizonyítás fogalmát igen széles körben használja a jogtudomány is. *Katona* (1990, 22. o.) szerint azonban „a területen jelentős terminológiai zűrzavar uralkodik". A jogtudomány álláspontja szerint a jogi bizonyításfogalom elviekben megfelel a más tudományokban használt bizonyításfogalomnak (*Nagy Lajos*, 1966). A következőkben áttekintjük azt a néhány különbséget, amelyek miatt a jogi bizonyítási tevékenység folyamata és módszerei speciálisnak számítanak.

Nagy Lajos (1966, 41. o.) szerint „a bizonyítás büntetőeljárási szerkezete általában megfelel a bizonyítás logikai szerkezetének, s attól csupán a bíróság sajátos ténymegállapítási feladatköre következtében tér el.". Logikai szerkezet alatt a más tudományokban is használt bizonyítás-struktúrát tekinti, vagyis hogy állítás igazságát kell kimutatni olyan állítások segítségével, amelyek igazságát már kimutatták. A ténymegállapítás folyamatának értelmezésével pedig egy újabb sajátosságát láthatjuk a bizonyításoknak: „A bizonyítás ténymegállapítási tevékenysége az előbbiek szerint a releváns történés megismerése, s ennek során azoknak az adatoknak a felderítése, amelyekből a bíróság a jelenben ... okszerű következtetéseket tud levonni." (*Nagy*, 1966, 39-40. o.)

A jogi bizonyítások sajátossága, hogy a bizonyítási tevékenység két nagy szakaszra osztható: a releváns tények felderítésére és a releváns tényekre vonatkozó megállapítások helyességének bizonyítására. Nyilvánvaló, hogy a két szakasz szorosan összefügg egymással, hiszen a releváns tények és az azokból levonható következtetések kölcsönösen feltételezik egymást. A kettéválasztás oka egyrészt az intézményi feladatmegosztásból ered (a releváns tények felderítése elsősorban nyomozati jogkörben történik), másrészt emlékeztet a felosztás arra, amit a filozófiai bizonyítások kapcsán az egymást feltételező induktív és deduktív bizonyításokkal kapcsolatban leírtunk.

Gödöny (1968) nem tartja helyesnek, ha a nyomozati és bírósági bizonyítási szakasz között elvi különbséget feltételezünk. Helyteleníti azt az álláspontot, amely három főbb területen írta le, hogy mennyiben más a nyomozati szakasz bizonyítása. Ezek a kritikával illetett szempontok a következők:

1) A bizonyítás terjedelme. Egyesek szerint a nyomozati szakasz bizonyításai terjedelmesebbek, mert ott kell dönteni még a relevanciáról is. Való igaz, hogy a nyomozati szakasz feladat az is, hogy eldöntse, melyik ügy kerüljön egyáltalán bíróság elé, de a ténylegesen bíróság elé került ügyekben *Gödöny* nem tartja elvi jelentőségűnek a bizonyítás terjedelmének szempontját.

2) A nyomozati szakasz kutatja a bizonyítékokat, a bírósági szakasz fölhasználja azokat. Gödöny szerint ez sem elvi jelentőségű különbség, inkább az intézményi sajátosságok megnyilvánulása.

3) A bíróságnál az értékelő funkció hangsúlyos, a nyomozó ugyanakkor az értékelés során valószínűségi alapon dolgozik. Ez az álláspont azért tarthatatlan *Gödöny* szerint, mert a nyomozati szakaszban is már objektív bizonyosságra van szükség.

Az eddigiekből következik, hogy a jogi bizonyításfogalom nem osztható induktív és deduktív bizonyításokra a bizonyítási eljárás szakaszai szerint. *Katona* (1990) a jogi bizonyítások alapvető módszereinek felsorolása során azonban mégis tesz annyi megkülönböztetést, hogy a nem teljes indukciós bizonyítási módszer a nyomozati szakaszban hipotézisek megfogalmazásához nyújt segítséget. *Katona* szerint a deduktív-induktív bizonyítások mellett a szillogisztikus bizonyítások, az ellentmondás-mentesség és a kizárt harmadik elve mint alapvető módszerek fontosak a jogi bizonyítások között. A *Katona* által alkalmazott felosztás, amely nem vethető össze sem a filozófiai, sem a matematikai bizonyítás-kategóriákkal, jelzi, hogy a jogi bizonyításokban fontos megkülönböztetni olyan bizonyításformákat, amelyek matematikai vagy filozófiai szempontból egyébként egy halmazba tartoznak.

A jogi bizonyításokkal kapcsolatban a közvélemény azt tartja, hogy „egy jó ügyvéd mindent be tud bizonyítani, sőt, még az ellenkezőjét is." A jogtudomány álláspontja szerint ugyanakkor a jogi bizonyítások induktív információszerző folyamatokat felhasználó deduktív bizonyítások, hasonlóan más tudományok bizonyításaihoz. Honnan eredeztethető akkor a közvélekedés szkepticizmusa a bizonyítások objektivitásával szemben? A kulcsot a „bizonyítási eszközök szabad mérlegelésének elvé"-ben találhatjuk meg. Ebből az alapelvből következik, hogy a büntetőeljárásokban nem lehet előre, általános érvénnyel meghatározni a bizonyítási eszközök bizonyító erejét, mert az mindig a konkrét ügytől függ (*Katona*, 1990).

A bizonyítékok szabad fölhasználásnak alapelvéből az következik, hogy ha egymásnak ellentmondó álláspontok mindegyike bizonyítani tudja igazát, akkor a bíróság jogkörébe tartozik a bizonyító erő mérlegelése. A mérlegelés során nyilvánvalóan sértetlenül maradhat az ellentmondás-mentesség és a kizárt harmadik alapelve is, sőt a bizonyítás deduktív formába is önthető. Ennek ellenére - különösen a vesztes fél részéről - előfordulhat olyan vélemény, hogy a bizonyítás szubjektív elemeket tartalmazott.

Lawrence (1991) szerint a bírósági ítéletek elsősorban attól függnek, hogy az információ milyen módon van szervezve és elmagyarázva. A tárgyaláson részt vevők gyakran heurisztikus gondolatmeneteket alkalmaznak, mivel a hallgatóság és az esküdtek számára az az érvelés meggyőzőbb, amelyben egy ismerős történetsémához kapcsolódva olyan állítások vannak logikus következtetések láncolatává fűzve, amelyek alátámasztják az érvelő által már korábban kialakított álláspontot a bűnösségről/ártatlanságról. A védő és az ügyész ezért gyakran mintha nem ugyanarról beszélnének. Mindkettőjüknek van egy kerek egész története, amelyben néhány számukra kedvező bizonyíték fölhasználása történik.

Összegzésképpen elmondhatjuk, hogy a jogi bizonyításfogalom más tudományok bizonyításfogalmaihoz hasonlóan a deduktív bizonyításokat tartja érvényesnek. A nyomozati szakaszban azonban az induktív módszereknek is fontos szerepe van, a bírósági szakaszban pedig a koherens, deduktív módon formalizált érvelések gyakran nem ugyanazokra a kiinduló állításokra épülnek.

1.1.4. A bizonyítások pedagógiai-pszichológiai szempontú megközelítése

A bizonyítást pszichológiai szempontból (összhangban a filozófia, matematikai és jogi értelmezéssel) *állítások igazságának igazolásával kapcsolatos tevékenységként értelmezzük. A bizonyítási képesség egyrészt bizonyítások megítélését, másrészt bizonyítások konstruálását teszi lehetővé.* Ez a meghatározás még kellőképpen tág, ezért szükség van néhány olyan fogalom áttekintésére, amelyek a bizonyítással kapcsolatosak.

Mit jelent a fenti definícióban szereplő „igazolás”? Ez a kifejezés akkor nyer értelmet, ha megmondjuk, milyen *kontextus*ban és kinek a számára kell igazolni egy állítást. Az igazolás szóval egyenértékűként használjuk bizonyításokkal kapcsolatban a „nyilvánvalóvá tétel” kifejezést.

Az *érvelés* kifejezés még inkább kifejezi, hogy a bizonyítások gyakran szubjektív elemeket tartalmaznak. *Wittman* (idézi *Ambrus*, 1993) felfogásában az argumentáció bővebb fogalom, mint a bizonyítás, és magában foglalhat nem-deduktív elemeket is. *Mariotti* (1998) az argumentáció értelmezése során a funkció felőli megközelítést választja. Szerinte akkor beszélünk argumentációról, amikor a cél a meggyőzés; meggyőzni valakit egy állítás igazságáról. Az argumentációval szembeállítva értelmezi a demonstrációt, amely közelebb áll a formális bizonyításhoz, mivel a matematikusok által elfogadott következtetési szabályok szerint történik.

A bizonyítások pszichológiai megközelítésével kapcsolatos problémák jól nyomon követhetők a matematikai bizonyítások pszichológiájának áttekintésével. A matematikai bizonyítás-fogalommal kapcsolatosan rámutattunk, hogy a matematikai bizonyítások általában nem tökéletesen formalizáltak A bizonyítások célja ugyanis nem az, hogy formai szempontból kielégítsék a bizonyításokkal szembeni követelményeket.

Ma többen is hangsúlyozzák azt a funkcionális különbséget, amely a matematikusok bizonyításai és az osztálytermi bizonyítások között fennáll. Az első esetben a *meggyőzés* funkciója domborodik ki, ellentétben az osztálytermi bizonyítások *magyarázó* szerepével (*Hersh*, 1993; *Chazan*, 1993). A két cél természetesen legtöbbször egymásba fonódik, mégis tetten érhető formai különbség a tudóstársaknak szóló bizonyítás és a megértést elősegítő, didaktikai szempontból átformált bizonyítások között. Ilyen formai különbségtételt találunk például a Lebesgue-integrállal kapcsolatos eredeti Lebesgue-féle bizonyítások és a Riesz Frigyes által kimunkált, a didaktikai alapelveket jobban szem előtt tartó bizonyítások között.

A matematikai bizonyítások lélektanának elemzése során napvilágra került, hogy a matematikai megismerés folyamata és a bizonyítás végső formába öntése teljesen más gondolkodási folyamatokat igényel. Matematikusok (pl. *Newton, Hadamard, Poincaré, van* *der Waerden*) önreflexiói, visszaemlékezései alapján azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a tényleges gondolkodási folyamatok alapvetően különböznek attól, amit a végső, formális bizonyítás tükröz (ld. *Dreyfus és Eisenberg*, 1996; *Hanna és Jahnke*, 1993).

Thurston (1995) is amellett érvel, hogy az emberek „nem válaszok valamiféle gyűjteményét akarják - amit akarnak, az a *megértés*" (29. o.). *Otte* (1994) szerint a bizonyításnak nem elég bizonyítani, az is elvárás, hogy általánosítson, fejlessze az intuíciót és az elme számára új területeket hódítson meg.

Az osztálytermi magyarázó funkció a megértést elősegítő, a „Miért?" kérdésre választ adó szerepet jelöl. *Battista* és *Clements* (1995) véleménye szerint „A formális bizonyítás csak olyan mértékben megfelelő, amilyen mértékben a tanulók használni képesek arra, hogy gondolatokat jelentéssel bíró módon (meaningfully) igazoljanak vele" (51. o.). Sokak véleménye szerint valójában a matematikatudományi bizonyítások is akkor jók, ha választ adnak arra a kérdésre is, hogy miért igaz a tétel.

A bizonyítások pszichológiai megközelítésének egyik eleme a bizonyítások esztétikumának vizsgálata. Nyilvánvaló, hogy a tanulók számára sem idegen az esztétikai szempont (*Winicki-Landman*, 1998), ám érdekes módon még matematikusok körében is érdeklődésre tart számot a bizonyítások esztétikumának vizsgálata. A bizonyítások esztétikumának ugyan nincs bevett rangskálája, de *Dreyfus* és *Eisenberg* (1996) szöveges feladatra adott két megoldásának példájából nyilvánvaló lehet, hogy mire gondolunk:

> Egy egyenes kieséses rendszerű tenisztornán 1024 versenyző indult. Hány mérkőzést kellett játszani, hogy megállapítsák, ki a győztes?
>
> **A megoldás:** Az első körben 512 mérkőzést játszottak, a másodikban 256-ot, a harmadikban 128-at stb. Így a győztes személyének megállapításához 512+256+128+64+32+16+8+4+2+1=1023 mérkőzésre volt szükség.
>
> **B megoldás:** A győztesen kívül mindenki pontosan egy mérkőzést vesztett, tehát 1024-1=1023 mérkőzést kellett játszani a tornán.
>
> Az első megoldás könnyen formalizálható, de a másodikat elegánsabbnak érezzük.

A bizonyítás-fogalom pszichológiai szempontú megközelítése során azt hangsúlyozzuk, hogy a matematikai és nem-matematikai bizonyítások formáját, tartalmát egyaránt meghatározzák olyan tényezők, amelyek nem elemei a matematikai bizonyításfogalomnak. Ezeknek a tényezőknek figyelembe vétele nemcsak azért szükséges, mert „torzulásokat' okoznak a bizonyításokban, hanem azért is, mert a lélektani tényezők által okozott különbségek lehetővé teszik a bizonyítások során megnyilvánuló gondolkodási folyamatok elemzését.

A bizonyítások pszichológiájához szorosan hozzátartozik annak vizsgálata, hogy a bizonyítási folyamat hatására a hallgatóság meg lesz-e győzve egy állítás igazságértékéről. Ennek a szempontnak a vizsgálata azonban már túlmutat a disszertáció céljain.

1.2. A bizonyítási képesség értelmezése

A kognitív kompetenciának azt a rész-komponensrendszerét, amely lehetővé teszi állítások igazságértékének igazolását, és ezzel összefüggésben bizonyítások megértését, értelmezését, bizonyítási képességnek nevezzük. A következőkben megmutatjuk, hogy a képesség szó használata az előbbi szóösszetételben összhangban van a külföldi és magyar képesség-nevezéktannal. A képesség szó gyakori és nem mindig precíz használata miatt ebben a fejezetben tisztáznunk kell egyes fogalmak jelentését ahhoz, hogy a bizonyítási képességet mint többszintű hierarchikus képességrendszert értelmezhessük.

1.2.1. A képesség jellegű tudás értelmezése

A didaktika ismételten visszatérő kérdése, hogy az iskolában elsősorban ismereteket kell tanítani vagy inkább képességeket kell fejleszteni. Történelmi koroktól, társadalmi környezettől függően többféle válasz adható erre a – *Csapó* (1999) szerint rosszul megfogalmazott – kérdésre. A mai álláspont az arany középútnak tekinthető: Bizonyítható, hogy nagyon fontos az ismeretek megtanulása a gondolkodás fejlődése szempontjából; ugyanakkor szükséges és lehetséges a sokféle tartalmon működő, képesség jellegű tudáselemek fejlesztése is. A gondolkodási képességek fejlesztése szempontjából alapvetően fontos a képességfogalom tisztázása. A képesség-fogalom egyöntetű használata szükséges feltétele annak, hogy a képességkutatás eredményei hatással legyenek a pedagógiai gyakorlatra.

A gondolkodási képességek kutatása két nagyobb problémakört érint: (1) Ténylegesen hogyan reprezentálódik a pszichikumban egy-egy gondolkodási képesség (2) Az értelem kiművelése szempontjából mi az egyes képességek és azok fejlesztésének jelentősége.

Az első tényező kutatása önmagában is jelentős, szinte az egész kognitív tudományt átölelő terület. A különböző megismeréstudományi megközelítésmódok közül a neuroanatómiai kutatások és a konnekcionizmus különböző változatai azt az alapvető kérdést is felvetik, hogy léteznek-e egyáltalán „tartalomtól független" gondolkodási folyamatok. A második problémakör régóta foglalkoztatja a pedagógiát. A tantervkészítőktől a gyakorló tanárokig mindenki számára fontos kérdés, hogy a tanítás-tanulás folyamatában mely képességek fejlesztésének kell előtérbe kerülnie adott életkori szakaszokban. A következőkben megmutatjuk, hogy a pedagógiai kutatásokban használt képesség-fogalmak egyrészt szükségszerűen kognitív tudományi és pszichológiai alapokon állnak, másrészt a gyakorlati alkalmazhatóság követelményei is befolyásolták a pedagógiai képesség-fogalom fejlődését.

A kognitív tudomány és a pszichológia hatása

A pedagógiai képesség-fogalom fejlődésére nagy hatással voltak és vannak a kognitív tudományi eredmények. A kognitív tudomány egyik legalapvetőbb kérdése, hogy az egyes tudáselemek hogyan reprezentálódnak a pszichikumban. Vajon a tudás pszichológiai-pedagógiai szempontból megkülönböztethető formái ugyanazok-e, mint az agyi reprezentáció szerinti formák? Az első szempont szerint meg szoktunk különböztetni tartalom-függő és tartalom-független gondolkodási folyamatokat, és ez utóbbiakat gyakran a képességekkel asszociáljuk. Megalapozott-e kognitív tudományi (reprezentációs) szempontból a tartalom-függő és tartalom-független tudás megkülönböztetése?

A gondolkodás kutatása az elme különböző megnyilvánulásain keresztül lehetséges. Ezek lehetnek „elemi", biokémiai folyamatok vagy lehet szó egy történelmi esszé megírásáról. Ami minden esetben közös: a megfigyelő, a kutató az elme megnyilvánulásainak értelmezésekor valamilyen viszonyítási pontot keres. Pl.: Milyen inger hatására aktiválódott egy agyi terület? Milyen feladat megoldása során született a válasz? A viszonyítási pont megadása szükségszerűen valamilyen „tartalom" meghatározását jelenti. A tartalomtól való függetlenség mértéke a gyakorlatban a viszonyítási pont egyszerűségének mértékével arányos.

Amikor tartalom-függetlenségről beszélünk, legtöbbször nem „kilúgozott", szemantikai értelemben jelentés-fosztott feladatokra gondolunk. Arról van inkább szó, hogy tartalomtól függetlennek tartunk egy gondolkodási folyamatot, ha az tartalmak széles körén hasonlóképpen működik. Ilyen értelemben természetesen léteznek tartalom-független gondolkodási folyamatok. Felvetődik a kérdés: a különböző tartalmú feladatok megoldása során megfigyelt gondolkodási folyamat más formában, más módokon létezik-e a fejünkben? A *Bánki M. Csaba* (1996) által is leírt hologram-hasonlat értelmében az agyban tárolt dolgok alapvetően kétfélék: tudásunk egy része „az agy egészében rejtőzik" (202. o.) (ugyanúgy, ahogyan a hologram minden darabja őrzi a teljes képet, csak éppen életlenül), míg az a típusú tudásunk, amelyik az előző fajta tudás feldolgozásáért felelős, konkrét agyi területekhez köthető.

Az első típusú tudás megnevezésére használhatjuk az ismeret jellegű tudás elnevezést, míg a második típusú tudást képesség jellegűnek hívhatjuk. Az ismeret jellegű tudásra ezek szerint az jellemző, hogy egyes agyi területek sérülésével nem egyes (úgymond: azon a területen tárolt) ismeretek tűnnek el a memóriából, hanem szinte minden tartalmi területen az „elhalványulás" lesz jellemző. A tartalom-független gondolkodási folyamatok másféle agyi reprezentációjának gondolatát erősítik a neuroanatómiai kutatások is. Például *Wharton és mtsai* (1998) az analógiás gondolkodás központjának lokalizálását célul kitűző kutatásuk alapján állítják, hogy „eredményeinkkel közelebb jutunk annak igazolásához, hogy a tartalom-független gondolkodást a bal agyfélteke irányítja" (265. o.).

Érdemes kiemelnünk, hogy - bár az ismeret-képesség elsődlegességéről szóló parttalan pedagógiai vita szempontjából az agykutatók megállapításai látszólag nem bírnak közvetlen jelentőséggel -, az agyban többféle tudás-tárolási, -működési forma létezhet. Ennek (is) egyik következménye, hogy azok az álláspontok, amelyek azt hirdetik, hogy elegendően sok ismeret birtokában a képességek megfelelő szinten működnek (vagy vice versa: jó képességek pótolják az ismeretek hiányát), az emberi értelem működésével kapcsolatos felszínes megállapításoknak tekintendők.

Az experimentális pszichológia emberi gondolkodást kutató ága az egyének közötti különbségek vizsgálata helyett a kismintás pszichológiai kísérlet alapján történő modellalkotást helyezi előtérbe. Kerüli a pszichometrikus „képesség" szóhasználatot, helyette gondolkodásfajtákról beszél. Jellemzően egy-egy „paradigma-feladat" mikrovilágai körül csoportosulnak a kísérletek (*Girotto* és *Light*, 1993). Egy tipikus paradigma-feladat Wason kártya-feladata (*Wason*, 1972), amely helyet kaphat az induktív és a deduktív gondolkodást vizsgáló tesztekben egyaránt (*Csapó*, 1994).

Az experimentális pszichológia által használt képesség-fogalmakról összefoglalóan azt mondhatjuk el, hogy rendkívüli mértékben „kutató-orientáltak", és gyakran paradigma-feladat(ok)hoz kapcsolhatók. Némi iróniával azt mondhatjuk, ha elég ügyesen tudunk érdekes feladatot kitalálni, akkor az annak megoldása során elképzelhető gondolkodási folyamatok talán egy vadonatúj képességfajta megtalálását eredményezik. Lehetséges ugyanakkor, hogy az adott gondolkodási képesség elemibb, egyszerűbb képességek eredőjének tekinthető. Pedagógiai szempontból ezért nagyon fontos az a törekvés (*Nagy*, 1990), amely nem engedi meg a képességek nevezéktanának elburjánzását, hanem igyekszik megtalálni a gondolkodási képességek elemi összetevőit; azt a néhány komponenst, amely a mentális folyamatok megismerése és a pedagógiai gyakorlat számára egyaránt jól használható kategóriákat jelentenek.

A kísérleti pszichológia emberi gondolkodást kutató területein belül fontos feladat volt az indukció és a dedukció értelmezése. A indukció-dedukció dichotómia végigkísérte az egész filozófiatörténetet, és a gondolkodás-lélektani leírást illetően ma is viták folynak. *Overton* (1990) szerint a gondolkodáson (thinking) belül létezik egy forma, amit következtetéses gondolkodásnak (reasoning) nevezünk, és ezen belül az egyik forma a deduktív gondolkodás, amelyre az jellemző, hogy általános megállapításoktól haladunk egyedi állítások felé, és a következtetés szükségszerűen adódik a premisszákból. *Johnson-Laird* és *Byrne* (1991; ld. még *Csapó*, 1992b) szerint az indukció és a dedukció úgy különböztethető meg, hogy növekszik-e a szemantikus információ vagy sem.

Overton és *Johnson-Laird* felfogásán is tükröződik, hogy a definícióikban a kutatásmódszertan szempontja érvényesül. Ha azt is figyelembe vesszük, hogy az induktív vagy deduktív gondolkodás mérésére hivatott feladat megoldása során a kísérleti személy vajon szükségszerűen igaznak érzi-e következtetését vagy csak valószínűnek, avagy - az ő szempontjából - szemantikai értelemben új következtetésre jutott-e vagy sem, akkor beláthatjuk, hogy az induktív és deduktív gondolkodás közötti különbségtétel semmitmondó abban a tekintetben, hogy milyen gondolkodási folyamat zajlik le a feladatmegoldás (következtetés) során.

Ma úgy látjuk, az induktív-deduktív gondolkodás nem kezelhető dichotómiaként. (A gondolat nem új; *Hegel*től eredeztethető.) Bár többen megkísérelték az induktív és deduktív gondolkodás különbözőségét szabatosan meghatározni, a különbség elsősorban a kísérletek eredményeit értelmező, a gondolkodási folyamatokat modellező kutatók módszertani eszközeiben keresendő. Valószínűnek látszik, hogy az induktív és deduktív gondolkodás kielégítő modellezéséhez a többszintű képességmodelleken át vezet az út. A helyzet ugyanis az, hogy nagyon sokféle kísérleti eredmény született már, amelyek integrálása szükségszerűen szétfeszíti a jelenlegi fogalmi kereteket.

A régi fogalmi keretek átalakulása megfigyelhető az analógiás gondolkodással kapcsolatban is. Az egyik uralkodó irányzat szerint az analógiás gondolkodás lényege a struktúra-leképezés, a másik fő irányzat a pragmatikus gondolkodási sémákra épít. Az empirikus adatok alapján nyilvánvaló, hogy egyes esetekben az egyik, máskor a másik irányzat modelljei működőképesebbek, de egyelőre hiányzik az integráció keresése, az eddigi eredmények más szempontú újraértelmezése (ld. *Zsigmond* és *Csíkos*, 2000). Abban azért egyetért a két irányzat, hogy létezik valamilyen pszichikus rendszer az emberi gondolkodásban, amely „analógiás gondolkodást igénylő" feladatokkal jól kutatható, de vita tárgyát képezi, hogy hogyan zajlanak le az analógiás gondolkodás legelemibb folyamatai. Egyéb gondolkodási formák (korrelatív gondolkodás, kreativitás stb.) esetében is arról van szó, hogy adott feladatfajták (amelyek a kutató szerint korrelatív összefüggést rejtenek vagy például adott tárgyak szokatlan felhasználásának leírására sarkallnak) valamiképpen tartalom-független gondolkodási folyamatok indikátorai lehetnek.

A tartalom-független gondolkodási folyamatok jellemzésére, precíz leírására tett kísérletek sora az intelligencia-vizsgálatokig nyúlik vissza. A sok ezer kísérleti személy által kitöltött tesztek adataiból lehetőség nyílt az intelligencia részterületeinek, az úgynevezett képességeknek (abilities) a meghatározására. Az intelligencia-kutatás adatainak feldolgozásában igen népszerű és gyakran alkalmazott módszer volt a faktoranalízis. Bár ez a módszertani kultúra több kutatási kérdés szempontjából irrelevánsnak bizonyult, az emberi gondolkodás jellemzésére, a képességek leírására gazdag fogalomrendszert hozott létre. A faktoranalitikus modellek hierarchikusan rendezett szintekbe sorolták a képességeket, és egységes fogalmi keretben tudták kezelni a közvetlenül a percepcióra épülő képességektől az általános intelligencia-faktorig bezárólag minden képességet.

Mi a faktoranalitikus módszer alkalmazásának hibája? *Anderson* (1998) a faktoranalitikus intelligencia-kutatás bírálatában azt hangsúlyozza, hogy az egyes faktorok kapcsolatai (hierarchikus rendeződés, hasonlóság) nem feltétlenül jelentenek valós, az emberi gondolkodás területei között meglévő kapcsolatokat - éppen azért, mert a faktorok emberek közötti különbségek statisztikai elemzéséből származnak. A probléma gyökere abban van, hogy az intelligencia-tesztek fejlesztésének folyamatában az egyik legfontosabb szempontot a tesztfeladatok mérésmetodikai értelemben vett jósága jelentette.

Olyan feladatok, amelyeket mindenki meg tud oldani (vagy éppen senki sem) nem szerepelnek-az intelligencia-tesztekben. Elsősorban éppen azért, mert a statisztikai elemzések szempontjából az ilyen feladatok rosszul viselkednek. Vagyis olyan feladatok kerülnek a tesztekbe, amelyeket várhatóan a kísérleti személyek egy jelentős része megold, egy jelentős része nem. Ezért mondják joggal a kritikusok, hogy az intelligencia-kutatók sokat tudnak arról, hogy milyen különbségek vannak az intelligenciában az emberiség egyes csoportjai között, de magáról az intelligenciáról vajmi keveset lehet tudni.

Nem meglepő az eddigiek alapján, hogy a faktoranalitikus intelligencia-kutatás utolsó mohikánjának számító *Carroll* (1998, 16. o.) szerint „a képesség *egyének közötti különbségeket* (kiemelés tőlem - Cs. Cs.) jelent abban a tekintetben, hogy egy jól meghatározott feladatosztályban milyen nehézségi szintű feladatokat képesek sikeresen megoldani." Eszerint csak olyan gondolkodási területeket nevezhetnénk képességnek, amelyek (ép) emberek között különbségeket mutatnak.

Pedagógiai képességfogalmak

A pedagógiai szakmai köznyelv által használt képesség-fogalmak több évtizedes múltra tekintenek vissza. Egy korszerű, tudományos igénnyel felépített rendszerben ugyanakkor „a széles körben használt fogalmakat kifejező szavakat mellőzni lehetetlen, és nem is kívánatos" (*Nagy*, 1968, 424. o.). *Lénárd* (1989) így fogalmaz: „Nehéz a megszokott, megtanult fogalomrendszert egy másikkal felváltani - még abban az esetben is, ha egy bonyolultabbat kell feladnunk egy egyszerűbb kedvéért". Néhány gondolkodási képességekkel kapcsolatos kifejezés, amelyek lépten-nyomon fölbukkannak a pedagógiai szóhasználatban: adottság, készség, jártasság, képesség. Ezek a kifejezések gyakran szerepelnek a pedagógiai szóhasználatban egymás helyettesítőjeként, szinonimájaként.

A 60-as évekig *a magyarországi didaktika három alapfogalma* volt az ismeret, a készség és a jártasság (*Nagy József*, 1968). A két utóbbi közötti különbségtétel kvalitatív jellegű volt (ld. például *Nagy Sándor*, 1960), s ez nem adott lehetőséget a készség és jártasság fejlettségének precíz meghatározására. *Nagy József* (1968) egyrészt megmutatta annak lehetőségét, hogy a készség és jártasság fejlettségi szintje kvantitatív eszközökkel is jellemezhető, másrészt rámutatott, hogy szerkezeti különbség van közöttük.

Nagy Sándor (1981, 80. o.) a következőképpen definiálta a jártasságot: „Jártasságon értjük - a szó didaktikai vetületében - az új feladatok, problémák megoldását ismereteink alkotó (kombinatív) felhasználása útján." A készség pedig „a tudatos tevékenység automatizált komponense" (86. o.) Látható, hogy ezek a meghatározások elsősorban az oktatás folyamatának és a tantervkészítésnek a szempontjait veszik figyelembe.

Orosz Sándor (1977) a tudásfajták mint pszichikus képződmények felosztásában megkülönbözteti az ismereteket és a tevékenységeket. A tevékenységet az ember és valóság közötti kapcsolat realizálásának tekinti, és két kétféle tevékenységről beszél: kognitív jellegű és operatív jellegű tevékenységekről. Megfigyelhető ugyanakkor ebben a rendszerben is, hogy bár maga a fogalmi keret más, ebben a felosztásban is helyet kaptak a fent említett leggyakoribb, képesség jellegű tudással kapcsolatos fogalmak. A készség például itt - hasonlóan *Nagy József* 1968-ban publikált értelmezéséhez - lineáris algoritmus szerint lefutó tevékenységet jelent. *Orosz Sándor* rendszerében megjelenik az általános képesség fogalma, amelyen aktuális fejlettségi szintet ért, és így a képesség magában foglalja az ismereteket, készségeket, jártasságokat is.

Az a gondolat, hogy a készségeket és jártasságokat egy közös nagyobb halmazba soroljuk, *Lénárd* (1982) munkájában is jelen van. *Lénárd* szerint a pedagógiai szóhasználatban a képesség, jártasság, készség fogalmakat a gyakorlással, gyakorlottsággal kapcsolatos fokozatbeli eltérésekkel jellemezték. Ennek gyakorlati hátrányát az olvasási készség olvasási képességgé alakulásának példáján szemlélteti. Következtetése szerint a képességek fejlesztését elősegítené, ha az egyes fokozatokra nem alkalmaznánk különböző elnevezéseket, hanem egységes alacsony, közepes vagy magas szinten fejlett *képesség*ekről beszélnénk.

Nagy József 1990-ben publikált rendszere a pedagógiai köznyelvben gyakran használt kifejezéseket egy tudományos igényességgel elkészített dichotóm rendszerbe helyezi. (A dichotómia mint rendező elv miatt a rendszer rokonságot mutat a *Johnson-Laird*-i taxonómiával, de ugyanakkor a rendszer Achilles-sarka is egyúttal.) A fejünkben lévő pszichikus rendszerek tipizálása egy többlépcsős algoritmus szerint történhet. Az öröklött pszichikus rendszereket adottságoknak nevezzük. A nem öröklött rendszerek között azt, amelyik közegfüggő, szokásnak hívjuk, a nem közegfüggő rendszerek között pedig tárgyfüggő a készség, és tárgyfüggetlen a képesség. A készség kategóriáján belül a struktúra zártsága illetve nyitottsága szerint rutinról és jártasságról beszélünk.

A struktúra zártsága, illetve nyitottsága szerint műveleti és komplex képességek léteznek. *Nagy József* jelentős hangsúlyt helyez az elemi műveletek (műveleti képességek) leírására. A pedagógiai szempontú képesség-kutatás egyik nagy kérdése az, hogy az összetettebb képességek visszavezethetők-e egyszerűbb (elemi) képességekre, és ha igen, milyen módon.

A dichotóm rendszer kritikája szerint azok a szempontok, amelyek mentén a pszichikus rendszerek egymástól elkülöníthetők, nem minden esetben kétértékű változók. A közeg- és tárgyfüggés sok esetben nem jellemezhető két értékkel. A tárgy- (vagy tartalom-) függés feltehetőleg inkább kontinuum mentén értelmezhető, de a vonatkozó pszichológiai kísérletek is ötfokú skálát használtak „Ha..., akkor..." típusú állítások értelmezésének vizsgálatára (*Overton és mtsai*, 1987; *Markovits*, 1986).

Felismerve a dichotóm rendszer rugalmatlanságát, az emberi gondolkodás „programjainak" jellemzésére *Csapó* (1992b) két dimenziót használ: az egyik tengelyen a tartalom-függetlenség szerepel, a másikon a pszichikus program zártsága. Egyúttal a nevezéktan egyszerűsítése és a külföldi szakirodalommal való átjárhatóság céljából *Csapó Benő* javasolta a képesség jellegű és ismeret jellegű tudás kifejezéseket, amelyeket mi is használtunk.

1.2.2. Az ismeret és képesség jellegű tudáselemek összefüggésrendszere

A tartalom szerepének vizsgálatával az ismeret és képesség jellegű tudás szembeállításának területére juthatunk. Már a kérdésfeltevéssel is hibát követhetünk el: Mekkora szerepe van a tartalomnak a képességek működésében? Nem várhatunk olyan választ erre a kérdésre, hogy mondjuk a tartalom szerepe 60%, a gondolkodási képességé 40%. Létezhet természetesen olyan kutatás, ahol egy statisztikai eljárás végeredményeként kijön egy 60%-os arány, például megmagyarázott varianciaként. A varianciára épülő statisztikai módszerekkel azonban nem kaphatunk érvényes adatot arra vonatkozóan, hogy „az emberek pszichikumában" mekkora a tartalom szerepe a képességek működésében.

A korrekt tárgyalásmód minden bizonnyal igényelné egy szabatos és egyszerű képességfogalom használatát. Sőt, szükség lenne az ismeretek pontos leírására is. Az ismeret filozófiai szempontból - egy lehetséges megközelítés szerint (ld. *Pethő*, 2000) - „az objektum képe vagy reprezentációja a szubjektumban". Ugyanakkor a kognitív tudomány konnekcionista modelljei a modellezés szintjén az ismereteket és a képességeket egyaránt hálózati mintázatnak tekintik (*Pléh*, 1998). Pedagógiai szempontból pedig *Csapó* (1992b) hangsúlyozta, hogy az ismereteket és a képességek gyakran helyettesítik egymást a problémamegoldó folyamatban. Számos kutatás vizsgálta, hogy milyen jellegű különbségek vannak egy adott szakma vagy speciális terület legkiválóbb művelői (experts) és a kezdők (novices) között. A legjobb sakkozó sem ismeri jobban a sakkjáték szabályait, mint egy ügyes kezdő, de a memóriában jelen lévő sok tízezernyi sakk-állás (pontosabban, *Simon* (1982) kifejezését használva: a feltételes cselekvésekből álló összetétel-rendszerekkel egyenértékű több tízezer struktúra) lehetővé teszi a gondolkodási idő rövidítését, a „lényeglátást". *Cauzinille-Marméche* és *Didierjean* (1998) - kísérletükben sakkproblémákat alkalmazva - megmutatták, hogy a problémamegoldás általános alapelveinek ismerete nemcsak problémák nagyobb csoportjában teszi lehetővé az eredményes megoldást, hanem a memorizálásban is óriási előnyt jelent. A szakértővé válás során tehát egy óriási és jól strukturált ismerethalmaz szükséges ahhoz, hogy az ismereteket működtető képességek megfelelően fejlődjenek.

A gondolkodási képességgel kapcsolatosan leírtaknak megfelelően az ismereteken keresztül a képességek egy tág értelmezése lehetséges. Azt mondhatjuk, hogy a képességek olyan pszichikus képződmények, amelyek sokféle tartalmon működőképesek. Ebben a definícióban a „működőképesség" arra utal, hogy konkrét tartalmú kognitív feladatokhoz és konkrét kísérleti szituációhoz kötött az ismeretek és képességek összefüggésrendszerének vizsgálata.

A továbbiakban elsősorban a deduktív gondolkodás kutatásának eredményeiből idézünk a tartalom szerepének illusztrálására. A teljesség igényének még a látszatát is elkerülve néhány konkrét kísérleti elrendezésben konkrét kognitív feladatok alapján kapott eredményeket vizsgálunk. *Wason* és *Green* (1984) szerint a hétköznapi gondolkodásban a logikai forma beleépül abba a tartalomba, amelyben az kifejeződik. Ehhez hasonló, nem kellően explicit kijelentések könnyen értelmezhetők úgy, hogy a deduktív gondolkodás valójában nem képesség-jellegű tudásterület. A legegyszerűbb példa, amivel az ilyen vélekedések megcáfolhatók, az egyik arisztotelészi szillogizmuson keresztül mutatható be:

Minden ember halandó.
<u>*Szókratész ember.*</u>
Szókratész halandó.

Ha a fenti következtetési séma állításait átfogalmazzuk úgy, hogy:

Minden soted hulob.
<u>*Szókratész soted.*</u>
Szókratész hulob

még mindig igen sok ember képes a következmény megállapítására, sőt, a következtetés helyességének elbírálására, holott a sotedekről és hulobokról nem voltak előzetes információink. Sok magyarázat adható a jelenségre az analógiás gondolkodástól a pragmatikus gondolkodási sémákon át a mentális modellek elméletéig. Mi most arra utalunk, hogy a *Nagy József* (1990) által adott definíció szerint a képesség tárgyfüggetlensége azt jelenti, hogy nem határozhatók meg azok a tárgyak (dolgok, objektumok), amelyeken az adott pszichikus struktúra működőképes. Mint példánkból látható volt, itt ez a helyzet állt elő, vagyis ebben az értelemben megalapozottan beszélünk képesség jellegű tudásról.

Más jellegű bizonyítékot talált a deduktív gondolkodás képesség-jellegének bizonyítására *Bennett Lau* (1983, idézi *Falmagne*, 1990). Két nevezetes plauzíbilis szabály (az előtag cáfolata[1] (denial of antecedent) és a következmény megerősítése[2] (affirmation of consequent) feladataiban az emberek többsége nem ismeri fel az indeterminált jelleget, hanem a következtetést 100%-ig biztosnak érzi. Fejlesztő tréninggel (ahol a gyerekek a „következmény megerősítése" sémát használó feladatok megoldása után visszajelzést kaptak, de magyarázatot nem) sikerült elérni, hogy a formailag más jellegű „előtag cáfolata" feladatokban is sokkal többen felismerték a következtetés indetermináltságát, pedig olyan típusú sémák nem szerepeltek a fejlesztő trénig során. A két különböző következtetési séma elsajátítása során fellépő transzferhatást a legkönnyebben úgy magyarázhatjuk, hogy feltételezzük a logikai indetermináltság felismerése képességének fejlődését.

A deduktív gondolkodással kapcsolatban régi keletű és nem csak *Piaget* (*Inhelder* és *Piaget*, 1955/1989) nevéhez köthető az az elképzelés, hogy az emberek képesek a formális logikának megfelelő gondolkodásra. *Henle* (1962) szerint a hibás feladatmegoldások csak ritkán magyarázhatók azzal, hogy az emberek nem jól ismerik vagy alkalmazzák a szillogizmusokat. Arról van szó inkább, hogy a feladatot rosszul értelmezik, és ez sokszor nem a gondolkodó ember, hanem a feladat hibája.

Számos kutatás próbálta feltárni az okokat, amelyek a formális logikának nem megfelelő megoldásokhoz vezetnek. A talán legrégebbi kutatási eredmény *Wilkins* (1928, idézi *Evans*, 1992) nevéhez fűződik. A szillogisztikus következtetési formák vizsgálatánál arra a következtetésre jutott, hogy a kísérleti személyeket befolyásolta az, hogy előzetesen milyen következtetést tartottak igaznak.

Oakhill, Johnson-Laird és *Garnham* (1989) vizsgálatában szerepelt a következő következtetési séma:

1. premissza: Néhány kommunista golfozik.
2. premissza: Minden golfozó kapitalista.
következmény: Néhány kommunista kapitalista. (Néhány kapitalista kommunista)

Mivel a következmény hihetetlen, ezért gyönge eredmények születtek ebben a feladatban. Feltehetőleg ezekből a megfigyelésekből táplálkozik a deduktív gondolkodás kutatásának egyik önironikus alapelve, mely szerint a kísérleti személyek csak akkor képesek teljes biztonsággal a helyes következtetés levonására, ha azt már eleve tudták.

Az emberi gondolkodásban meglévő úgynevezett hajlamok (bias) gyakran nehezítik meg vagy teszik lehetetlenné a „helyes" következtetés levonását a deduktív gondolkodást vizsgáló feladatokban. Az idézőjel nem véletlen, hiszen csupán arról van szó (ld. *Evans*, 1992), hogy valamely logikai rendszerhez (általában a kétértékű kijelentés-logikához) viszonyítva a kísérleti személyek sokszor váratlanul gyenge teljesítményt nyújtanak. Ezek az eltérések a legtöbb esetben a „Ha..., akkor..." típusú kijelentések értelmezésére, az azokban szereplő tartalmak szerepére vezethetők vissza. *Matalon* (1962/1990) eredményei jól szemléltetik ezt a jelenséget. A kísérleti személyeknek négy állítás igazságáról kellett dönteniük:

a) Ha az elefántok rózsaszínűek, akkor 2+2=4.
b) Ha az elefántok szürkék, akkor 2+2=4.
c) Ha az elefántok rózsaszínűek, akkor 2+2=5
d) Ha az elefántok szürkék, akkor 2+2=5.

Az állítások elfogadottságának sorrendje a következő volt: c), b), d) a). Legelfogadottabb tehát az az állítás, amelyben az előtag és az utótag is hamis! Logikai-műveleti szempontból egyedül a d) állítás hamis, a többi igaz. A d) állítás mégis elfogadottabb volt, mint az a), amelyben hamis előtag és igaz utótag szerepelt. Vagyis a kísérleti személyek

[1] „Ha p, akkor q" állítás és „nem p" esetén „nem q" valószínű.
[2] „Ha p, akkor q' állítás és „q" esetén „p" valószínű.

nem akceptálták azt a logikai szabályt, amit egyszerűen úgy szoktunk mondani, hogy „hamis állításból bármi következik". A kísérlet nem ad választ arra a kérdésre, hogy a meglepő eredmény mennyiben a logikai nehézség (az elő- és utótag igazságértéke) és mennyiben az állítások tartalma miatt adódott, de más kísérletekkel összevetve azt mondhatjuk, a tartalomnak is szerepe volt a furcsa eredményekben.

Az emberi gondolkodás kutatásának utóbbi négy évtizedében az első, „deduktivizmus" szóval jellemezhető (ld. *Butterwoth*, 1993) és *Piaget* nevével fémjelzett időszakban a tartalom szerepével kapcsolatos kiindulópont az volt, hogy a kísérleti személyek akkor képesek a formális gondolkodásra, amikor a problémahelyzet megfelel az érdeklődési körüknek, adottságuknak és esetleg speciális foglalkozási területüknek (*Roberge*, 1977). Ha végigtekintünk a *Piaget*-i kísérletekben használt feladatokon, akkor valóban azt látjuk, hogy nem nyelvi csűrés-csavarások sorozata szerepel bennük, hanem ismerős tartalmak fordulnak elő.

Komatsu és *Galotti* (1986) különböző területek (fizika, társadalom, logika) szabályrendszerei alapján készített tesztekkel jelentős különbségeket mutattak ki a különböző tartalmi területek között. Nemek közötti különbség is kimutatható volt a fiúk javára a fizikai szabályok területén.

Wason és *Shapiro* (1971) eredményei szerint a Wason-féle kártyafeladatban ugrásszerűen javultak az eredmények, amikor absztrakt tartalom, betűk és számok helyett városok és közlekedési eszközök szerepeltek a kártyákon. Számos további kísérlet igyekezett kimutatni tartalmi hatásokat a Wason-feladattal kapcsolatban (áttekintésüket ld. *Cosmides*, 1989; *Csíkos*, 1999a; *Evans*, 1982; *Eysenck* és *Keane*, 1997). Bizonyossá vált, hogy a tartalmi hatás újabb két tényezőre bontható: az állításokban szereplő dolgok ismertsége, barátságossága (familiarity) és az elő- és utótag kapcsolatának szorossága, relevanciája.

A tartalom szerepének vizsgálata „Ha..., akkor..." típusú állításokban a tartalom ismertségének, barátságosságának elemzése mellett megkövetelné az elő- és utótag összetartozásának vizsgálatát is. Az első szempontú vizsgálatok alaphipotézise az, hogy minél ismertebb a tartalom, annál jobbak lesznek az eredmények. *Markovits* (1986) a kísérleti személyekkel ötfokozatú skálán értékeltette a tartalom ismertségét, barátságosságát. Eredményei alátámasztják azt a hipotézist, mely szerint a tartalom ismertségének (familiarity) jelentős szerepe van abban, hogy a következtetés megfelel-e a formális logikának vagy nem.

Az elő- és utótag kapcsolatának vizsgálatát elvégezhetjük külső kritérium (pl. a releváns logika, ld. *Vidákovich*, 1989b; vagy az *Anderson-Belnap*-féle operátor (ld. *Piéraut-Le Bonniec*, 1990) alapján. Logikai szempontból kétségkívül korrekt lenne az elemzés, de az empirikus kutatási eredményeket nem magyarázhatjuk így. Egy másik lehetőség belső kritérium felállítását jelenti, s erre a következő példát találhatjuk:

Az elő- és utótag kapcsolatának szorosságát *Shawn* és *Overton* (1990) ötfokozatú skálán mérte. A kísérleti személyeknek azt kellett értékelniük, hogy az elő- és utótag tartalma mennyire szorosan függ össze egymással. (Pl. „Egy ember sört iszik. Az ember elmúlt 21 éves"). Eredményeik szerint 10 és 17 éves kor között a formális logika szempontjából jelentős fejlődés mutatkozik az olyan feladatoknál, ahol az elő- és utótag kapcsolatának szorosságát a kísérleti személyek átlagosan legalább 4-es értékűnek ítélték. Alacsonyabb értékek esetében szinte alig van változás a hét év alatt.

Nem ismerünk olyan vizsgálatot, amely az imént említett két szempontot egyszerre vette volna figyelembe a tartalom szerepének elemzésében. Sejtésünk szerint a két tényezőt ilyen módon *nem lehet* egymástól *függetlenül* mérni. Ennek egyik oka, hogy ismeretlen vagy túlzottan absztrakt tartalmak esetén a relevancia megítélése bizonytalanná válhat.

Szintézisre törekvések a tartalom szerepével kapcsolatban

A már említett „deduktivizmus" tudománytörténeti korszakot a „kontextualizmus" korszaka váltotta föl (*Bhaskar*, idézi *Butterworth*, 1993). A korszak nyitányát nem lehet évszámhoz kötni, de az egyik legjelentősebb tanulmányban *Cheng* és *Holyoak* (1985) fejtették ki a pragmatikus gondolkodási sémák elméletét. A pragmatika mint filozófiai-nyelvészeti-pszichológiai kutatásterület paradigmaváltása mintegy 20 évvel ezelőtt történt. *Sperber* és *Wilson* (1981) a korábbi (*Grice* nevéhez köthető (ld. *Sperber* és *Wilson* 1995) kijelentés-*felfogás* (utterance-comprehension) alapelvvel szemben a kijelentések *értelmezését* (utterance-interpretation) emeli ki, amely - hétköznapi kifejezéssel - a „kettőn áll a vásár" alapelvre utal. Ez azt jelenti, hogy a kijelentésekből levonható következtetések legtöbb esetben a közlési szándéktól és a befogadó ismereteitől is függnek. *Sperber* és *Wilson* (1981, 1995) a kijelentés-értelmezési folyamatban a relevancia szerepét is másképp ítélik meg: szerintük a kijelentések relevanciájának maximalizálása azt jelenti, hogy minél több - a kontextusból adódó - következmény minél kisebb fáradtsággal legyen levonható. Ugyanakkor hangsúlyozzák, hogy a relevancia nem kvantifikálható, hanem a hatás és az erőfeszítés kvalitatív függvényében értelmezhető.

Cheng és *Holyoak* (1985) tanulmányának alapgondolata az, hogy a „Ha..., akkor..." és az „Akkor és csak akkor..., ha..." típusú állítások értelmezése nem szintaktikus értelmezést jelent, hanem konkrét szituációkra épül; azaz úgy válik lehetővé, hogy hétköznapi eseményekből (megengedések, tiltások, ok-okozati kapcsolatok) ***induktív úton*** absztrakt tudás-struktúrák jönnek létre. A deduktív gondolkodást vizsgáló feladatokban szereplő állítások tartalma tehát olyan módon befolyásolja a feladatok megoldottságát, hogy olyan kifejezés esetén, amelyhez megvan a megfelelő pragmatikus gondolkodási séma, sokkal jobb eredmények születnek, mint más esetben. Elméletüket alátámasztja az a tény is, hogy a pragmatikus gondolkodási sémákra épített fejlesztő tréningek eredményesebbnek bizonyultak a szintaktikai megközelítést alkalmazóknál (*Cheng, Holyoak, Nisbett* és *Oliver*, 1986). *Girotto* és *Light* (1992) szerint a pragmatikus gondolkodási sémák elmélete a magyarázat arra, hogy gyakran 6-7 éves gyerekek igen jó teljesítményt nyújtanak gondolkodási feladatokban. *Girotto* és *Ligth* szerint a *Cosmides* (1989) által leírt „csalók keresése" (looking for cheaters) mechanizmus is megfigyelhető volt a gyerekek válaszai alapján.

A következő poszt-piagetiánus elmélet, amit a tartalom deduktív gondolkodásban betöltött szerepével kapcsolatban említünk, *Cosmides* (1989) nevéhez köthető. *Cosmides* szerint a tartalom szerepe a szociális interakciók világában vizsgálható, így az elő- és utótag kapcsolatának relevanciája, valamint a tartalom ismertsége, barátságossága nem különíthető el egymástól.

Gorman (1992), *Gorman* és *Gorman* (1984) *Wason* (1960) egy másik híres feladatával foglalkoztak többféle megközelítésben. Az úgynevezett 2-4-6 feladatban ezt a számsort kellett a kísérleti személyeknek folytatniuk, és rájönni arra, hogy mi a szabály. Nem páros számok növekvő sorozatát kellett folytatni, hanem tetszőleges növekvő számsor elfogadható volt megoldásként. A falszifikációs elv vizsgálatára kiválóan alkalmas feladattal kapcsolatos eredmények is azt mutatták, hogy a kísérleti személyek által adott válaszok szociálisan és kontextuálisan is meghatározottak(*Gorman*, 1994). Más eredmények születtek egyéni kísérlet és más eredmények csoportos vizsgálat esetén.

Az ismeretek és képességek összefüggésrendszerébe a deduktív gondolkodás példáján keresztül pillantottunk bele. Az elmondottakból érzékelhető, hogy még azok a szempontok is vitatottak, amelyek alapján az ismeretek és képességek összefüggéseit jellemezni lehet.

1.2.3. Képesség jellegű tudás és kontextus

Az elmúlt egy-két évtizedben a kognitív feladatok megoldásával kapcsolatosan fokozott figyelmet kapott a kontextusba ágyazottság. Azon túlmenően, hogy a tartalom feladatmegoldást befolyásoló szerepét már évtizedek óta ismerjük (a híres Wason-feladat esetében például 1971 óta), a feladatmegoldás kontextusának elemzése nem egyszerűen a tartalmi különbségek figyelembe vételét jelenti.

Butterworth (1993) rámutat arra, hogy a legtöbb tanulmányban, amely a kontextuális hatásokkal foglalkozik, rejtve marad, hogy a szerző mit ért pontosan „kontextus" alatt. Az implicit értelmezések ugyanakkor igen széles skálán mozognak. A következőkben egy olyan kontextus-értelmezést alkalmazunk, amely a sokféle implicit definíció lényeges jegyeit ötvözi.

A kontextus meghatározásában legtöbbször a *kulturális* és *szociális* tényezők kapnak szerepet. A kultúra szerepének elemzésében központi helyet kap a nyelvi tényezők vizsgálata, mivel a kultúra átvitelében a nyelvnek meghatározó szerepe van. *Mercer* (1993) nyelvészeti szemszögből közelítve a kontextus problémájához úgy véli, hogy legtágabb értelemben a kontextus egy adott kijelentéshez kapcsolódó relevánsnak vélt külső tulajdonságok halmazát jelenti, amely külső tényezők befolyásolják egy kijelentés nyelvi analízisét. A nyelv ugyanakkor konkrét fizikai megjelenési formákhoz köthető. Ezért nagyon fontos a kontextus értelmezésében a figyelem jelentőségét kiemelni, az intra- és interperszonális aspektusokat egyaránt (*Butterworth*, 1993; *Roazzi* és *Bryant*, 1993).

A kontextus meghatározásának másik pillérét a szociális tényezők alkotják. *Roazzi* és *Bryant* (1993) rámutatnak, hogy a szociális réteghez tartozás meghatározó lehet abból a szempontból, hogy ki hogyan értelmez egy-egy kognitív feladatot. A kísérletekben a híres Piaget-i térfogat-megőrzési feladatot használták, amelyben a kísérletvezető egy pohárnyi limonádét áttölt keskenyebb pohárba, és a kísérleti személynek fel kell ismernie, hogy ezzel nem változik a folyadék mennyisége. *Roazzi* és *Bryant* azt tapasztalták, hogy a munkásosztály gyermekei akkor nem szerepeltek gyengébben középosztálybeli származású társaiknál, ha ésszerű magyarázatot kaptak arra, hogy miért történik az átöntés.

A kontextuális hatások elemzésének lényege: Két feladat, amelyek tartalmi szempontból egyformák, a feladatra vonatkozó kommunikáció által mégis különbözők lehetnek, és ez megnyilvánul az egyébként azonos gondolkodási formát vizsgáló feladatokon elért különböző eredményekben. *Butterworth* (1993) szerint a kontextuális tényezők különféle hierarchikus szintekhez tartoznak, és a 1) nyelven, 2) az érzékelésen és 3) a figyelmen keresztül azonosítható hatásaik vannak.

A következő kérdések mind a kontextus hatásának problémakörét érintik - a konkrét iskolai szituációba ágyazva:

- Milyen különbségek adódnak a feladatmegoldásban, ha ugyanazt a feladatot egyszer egy matematika, másodszor egy kémia tudásszintmérőben szerepeltetjük?
- Van-e különbség a tanulói teljesítményekben, ha egy számítási feladat egyszer önálló feladatként szerepel, más alkalommal egy szöveges feladatba ágyazottan?
- Hogyan befolyásolja a tanulói teljesítményt egy adott tesztben a feladatok sorrendje?
- Hogyan befolyásolja a tanulói válaszok minőségét és hosszát a feladat leírása után a tesztlapon kihagyott üres terület?
- Mely tanulókat érinti leginkább hátrányosan, ha feleletválasztó feladatoknál elmarad a feladat elejéről az utasítás?

Az itt felsorolt néhány kérdés élő kutatási témákra vonatkozik. Az első két probléma kapcsán *Barát* (2000) empirikus adatai alapján a kontextus óriási szerepe nyilvánvaló, s egyszersmind az is, hogy a kontextus kezelése (a kontextus eltérítő hatásának következetes megnyilvánulása miatt) egy kognitív jellegű képességnek tekinthető. Az item-sorrend szerepéről folynak ugyan kutatások, de a kérdés vizsgálatát megnehezíti, hogy az item-sorrend hatása nagyon sok tényezőn keresztül érvényesül (pl. a teszt tanító hatása, a teszt-szorongás változása.) A tesztjeink formai megjelenésének teljesítményt befolyásoló hatása nyilvánvalóan létezik, ám nehezen kvantifikálható. Alapelvként leszögezhetjük, hogy a tesztszerkesztés és folyamatos tesztfejlesztés során teret kell engednünk a pedagógiai tapasztalatnak abban a kérdésben, hogy mekkora helyre van szükség az elvárt válasz megadásához. A feladatok minél explicitebb megfogalmazása az eddigi eredmények szerint (pl. *Roazzi* és *Bryant*, 1993) senki számára nem hátrányos a feladaton nyújtott teljesítmény szempontjából, sőt, az alacsonyabb presztízsű társadalmi rétegekből származók számára kifejezetten előnyös. Marginálisnak tűnő megjegyzés, de valójában az egész iskolarendszert érintő: Ha szelektív iskolát akarunk, akkor ne adjunk explicit utasítást a feladatok elején. A gyerekek majd kitalálják, mi a feladat...

A bizonyítási képességgel kapcsolatosan a kontextus szerepét illusztrálandó, vizsgáljuk meg egy bizonyítási feladat négy lehetséges megfogalmazását: A feladat megfogalmazásának módja elsősorban a feladatot kitűző szándékait, az általa várt megoldást tükrözi.

A bizonyítandó állítás igazságértéke szerint két eset van; és két esetet különíthetünk el aszerint is, hogy a feladat szövege egyszerűen az állítás igazolását kéri-e, vagy „igaz-e" kifejezést is tartalmaz. Ez utóbbi esetben a megoldó többletfeladata az állítás igazságértéke melletti állásfoglalás (ld. 1. táblázat).

1. táblázat. Példák az állítás igazságértéke és a feladatkitűzés módja szerinti feladattípusokra

	felszólító	**kérdező**
igaz állítás	„Bizonyítsd be, hogy nem minden prímszám páratlan!"	„Igaz-e, hogy nem minden prímszám páratlan?"
hamis állítás	„Bizonyítsd be, hogy minden prímszám páratlan!"	„Igaz-e, hogy minden prímszám páratlan?"

Általában igaz állítás felszólító, hamis állítás pedig kérdező típusú feladatban szerepel. Ehhez a tanulók is hozzászoknak, és kérdező feladatnál legtöbbször cáfolni igyekeznek az állítást. Éppen ezért igaz állítás szerepeltetése kérdező feladatban félrevezető lehet. Még inkább félrevezetőnek érezzük azt, ha hamis állítás felszólító feladatban szerepel. *Movshovitz-Hadar* és *Hadass* (1990, 266. o.) ezzel ellentétben hasznosnak tartják az ilyen feladatkitűzést is. Véleményük szerint a matematikatanítás alapelvei között szerepel, hogy „a hibázás lehetőségének szabadsága a matematikai tudás fejlesztésének alapját képezi", és „a hibás bizonyítás alapjául szolgáló helytelen logika megtalálása a hirtelen felismerés lehetőségét nyújtja".

1.2.4. A képesség jellegű tudás metakomponensei

Bizonyítások konstruálása és értelmezése során egyaránt fontos szerepet játszanak olyan tudatos gondolkodási folyamatok, amelyek a bizonyítási képesség szempontjából fontos kognitív komponenseket irányítják. Általánosságban is igaz, hogy a tudás fontos eleme a tudásról való tudás: például a annak tudása, hogy mit tudunk és mit nem; és amit tudunk, az hogyan és mikor használható fel leghatékonyabban a gondolkodásban. A tudásról való tudásról beszélve 'meta-' előtagú fogalmakat szoktunk használni.

Nelson (1996) szerint a 'meta-' fogalmak eredete *Tarski* gondolataira vezethető vissza, aki megoldotta az évszázados Comte-paradoxont. *Comte* szerint a gondolkodó nem oszthatja magát két részre: egy gondolkodó részre, és egy olyan részre, amelyik megfigyeli ezt a gondolkodást. (*Wundt* a paradoxont Münchhausennek ahhoz a kalandjához hasonlítja, amikor hajánál fogva kihúzta magát a mocsárból.) *Tarski* úgy oldotta meg a problémát, hogy bevezette a 'meta-' fogalmat, amellyel leírható az a szint, amely már képes számot adni a gondolkodási folyamatokról.

A metakogníció az utóbbi két évtizedben gyakran használt fogalom, a metakognitív tudás pedig igen intenzíven kutatott terület lett. A 'metakogníció' fogalom megjelenése *Flavell* (1979) nevéhez köthető. A metakogníció első közelítésben a tudásról való tudást jelent. A pontosabb meghatározás több tudományágban jelenleg folyó kutatások feladata. A magyar nyelvű pedagógiai szakirodalomban néhány publikációban találkozhattunk a metakogníció fogalmának ismertetésével (pl. *Csapó*, 1992b; *Tarkó*, 1999). Maga a problémakör (a tudásról való tudás és annak tanítása) más terminológiával jelen van a népszerűsítő pedagógiai szakirodalomban is (pl. *Oroszlány*, 1998; *G. Havas*, 1999).

A metakogníció áttekintését *Flavell* eredeti elképzeléseinek bemutatásával kezdjük, majd két újabb modellt elemzünk. Bemutatjuk a metakogníció kapcsolatát a tudatossággal és a gyermeki tudatelméletekkel. Megvizsgáljuk, hogy a gondolkodás többszintű modelljeibe hogyan építhető be a metakognícióval kapcsolatos kutatások terminológiája. Végül a metakogníció jelentőségét és fejleszthetőségét vizsgáljuk majd. A metakogníció és a bizonyítási képesség kapcsolatrendszerének bemutatására a következő alfejezet vállalkozik.

Flavell (1979) felismerte, hogy a metakogníció meglehetősen összetett fogalom, amelynek két nagyobb jelentésköre van: egyrészt a tudással kapcsolatos (tárgyi) tudás, másrészt a tudás működtetésének kontrollja. Látható, hogy az első jelentés valójában közönséges „nem-meta" tudást jelent inkább, azzal a specialitással, hogy nem konkrét objektumokra, hanem az emberi tudásra vonatkozik. Például annak ismerete, hogy tíz memorizálandó szót úgy könnyebb megtanulni, ha csoportosítjuk azokat gondolatban (hogy a Miller-féle bűvös szám alá kerüljünk), tekinthető ugyan metakognitív tudásnak, de ez véleményem szerint a funkcionális szempont túlhangsúlyozása, és az agyi reprezentáció azonossága vagy különbsége problémájának elhanyagolása. A metakogníció másik dimenziójával kapcsolatban sokkal inkább természetes a 'meta-' előtag használata. Annak gondolata, hogy gondolkodásunk többszintű, és a különböző szintek funkcionálisan és fejlődésükben is azonosíthatók, a gondolkodás többszintű modelljeivel is összhangban van.

Flavell 1987-ben írt tanulmányának címe - Elmélkedés (speculations) a metakogníció természetéről és fejlődéséről - utal arra, hogy továbbra sem volt tisztázott a korábbi cikkében említett jelentés-dimenziók tartalma, szerkezete és jelentősége. *Flavell* (1987) annyiban igyekszik meghaladni a korábbi álláspontját, hogy szerinte a metakogníció értelmezéséhez két kulcsfogalmat kell áttekinteni: a *metakognitív tudást* és a *metakognitív tapasztalatot.*

A *metakognitív tudás* három fontos területre osztható: 1) személyi változók (person variables), vagyis a képesség, hogy önmagunk, mások és általában az ember képességeiről megfelelően gondolkodjunk; 2) a feladat-változók (task variables), ami a feladatok nehézségének megfelelő értelmezését jelenti; 3) stratégia-változók (strategy variables). Ez utóbbiak esetében világosan különbséget kell tenni a kognitív és a metakognitív stratégiák között: a kognitív stratégia arra szolgál, hogy elérjük a kognitív célt, míg a metakognitív stratégiák feladata, hogy teljesen biztosan megállapítsuk: a kognitív célt elértük. (Pl. Az út-idő-sebesség feladatokra a legtöbb tanulónak kialakul valamilyen kognitív stratégiája. Az már egy más jellegű - metakognitív stratégiát igénylő - feladat, hogy a feladatmegoldás helyességét is el tudjuk dönteni.)

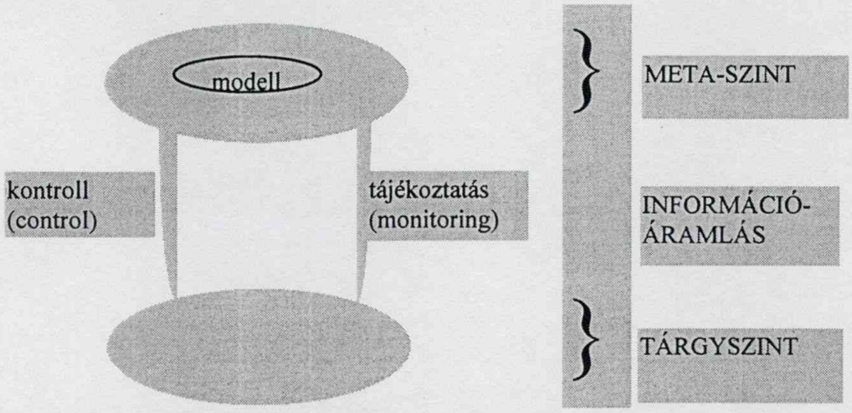
A *metakognitív tapasztalat* jellemzője, hogy egyszerre tudatos, kognitív és affektív. Ide tartozik annak észrevétele, hogy beszélgetőtársunk nem ért valamit, de szeretné megérteni, vagy annak felismerése, hogy egy kognitív feladat túl nehéz avagy érthetetlen. Flavell szerint már a kisgyermekeknek is vannak metakognitív tapasztalatai, de még nem tudják azokat megfelelően szavakba önteni.

Flavell gondolatai a tudásról való tudásról a metakogníció fogalmának további pontosítását sürgették. A gondolkodás meta-szintjének egy modellje *Nelson* és *Narens* nevéhez köthető (*Nelson*, 1996). A 'meta' és 'nem-meta' pontosabb megkülönböztetését elősegítheti, ha először egy konkrét példát tekintünk:

EBEN A MONDOTBAN HÁROM HIBA VAN.

Gondolkodásunk egyik szintjének komponensei rögtön felfedeznek két hibát a fenti mondatban. A meta-szint komponenseire hárul ugyanakkor a feladat, hogy tudatossá tegyék, a fenti mondatban csak két hiba van, és nem három, tehát valami nem stimmel. Az utolsó lépés (ez a két szint szoros együttműködéseképpen jön létre) lehetővé teszi annak felismerését, hogy a mondat tartalma is hibás, és így összesen meglehet a három hiba. Észrevehetjük, hogy gondolkodásunk számtalan komponense működésbe lépett a mondat elolvasása során. Például európai neveltetésünk és iskolázottságunk arra motivált bennünket, hogy ha egy ilyen mondatot olvasunk, akkor megkeressük a három hibát. Miután csak kettőt találtunk, elő kellett venni azt a tudásunkat, mely szerint egy könyvben, nyomtatásban megjelenő rejtvénynek általában van megoldása, tehát érdemes folytatni a keresést a harmadik hiba megtalálásáig.

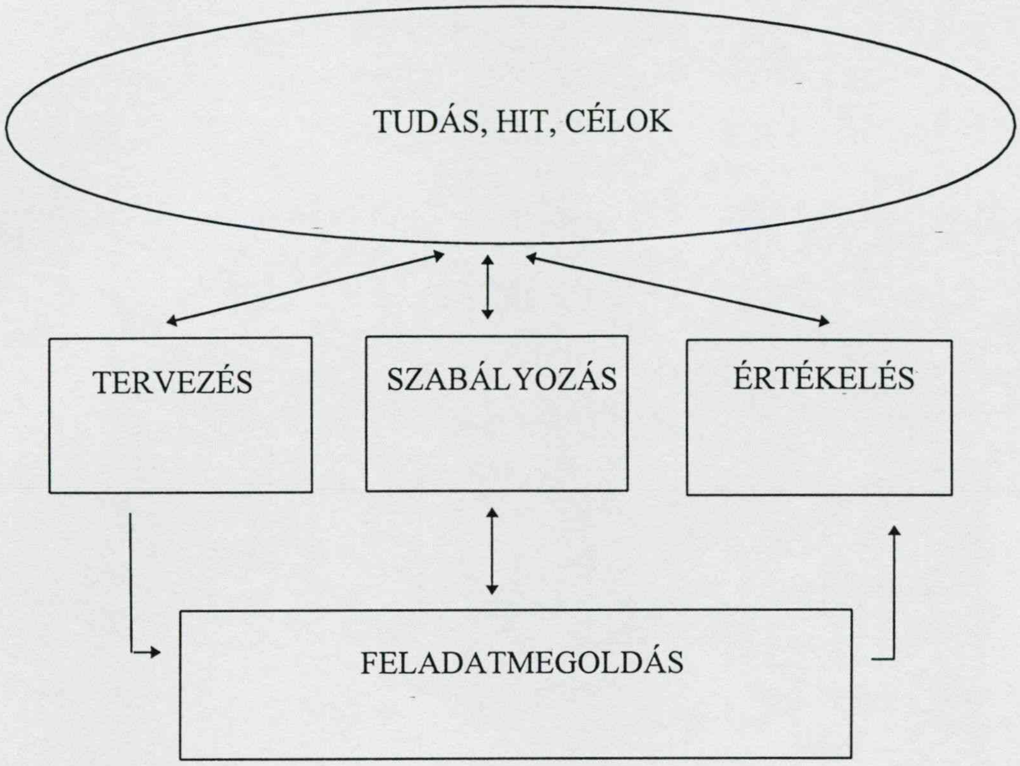
Az előbbiekben megkülönböztetett két gondolkodási szintet *tárgyszintű*nek és *meta-szintű*nek nevezhetjük. A két szint hierarchikus kapcsolatát és a közöttük lévő információáramlást szemlélteti a következő modell:



1. ábra. A metakogníció modellje Nelson szerint (forrás: Nelson, 1996, 105. o.)

A modell szerint a tárgyszint és a meta-szint között folyamatos az információ-áramlás. A tárgyszint informálja a meta-szintet arról, hogy milyen az állapota, a meta-szint pedig megmondja a következő lépést. Ehhez szükséges, hogy a meta-szint rendelkezzék egy modellel, amely tartalmazza a célokat, és az azok eléréséhez vezető utakat. Ha a kutató fantáziája meglódul, akkor továbblépve azt a tudást, amely a metakognícióra vonatkozik, meta-metakogníciónak nevezhetnénk, és határ a csillagos ég... Mint láttuk, az ismeretek és képességek agyi reprezentációjában meglévő különbség kimutatásához hasonlóan a neuroanatómia segíthet, hogy a realitások talaján maradjunk abban a kérdésben, hogy hány szintű a gondolkodásunk (Nelson, 1996).

A gondolkodás tárgyszintjének és meta-szintjének nelsoni leírása nem elegendő ahhoz, hogy az elmúlt két évtized metakognícióval kapcsolatos terminológiai dzsungelében tisztán lássunk. Éppen ezért kiemelkedően jelentősnek tartom *Artzt* és *Armour-Thomas* (1998, 8. o.) modelljét, amelyben a szakirodalomban gyakran használt kifejezéseket (pl. szabályozás, tervezés, értékelés) egységes keretbe helyezik. A modell egy konkrét kísérlethez kapcsolódóan született, amelyben *Artzt* és *Armour-Thomas* (1998) matematikatanárok tanítási stílusának metakognitív aspektusait elemezték. A következőkben ennek a modellnek egy általánosított változatát mutatom be:



2. ábra. A metakogníció egyes komponenseinek rendszere Artzt és Armour-Thomas (1998) szerint

A tervezés, szabályozás, értékelés a feladatmegoldással kapcsolatos preaktív, interaktív és posztaktív fázisokhoz tartoznak. Artzt és Armour-Thomas modellje azért nagyon jelentős, mert megmutatja a metakogníció tényezőinek egy olyan lehetséges rendszerezését, amelyben a feladatmegoldás folyamata a rendező szempont.

A metakogníció vizsgálatának kialakult egyfajta hagyományrendszere. A kísérleti személyek meta-szintű állításokat fogalmaznak meg vagy értelmeznek, amelyek a tárgy-szinten végbemenő jelenségekre vonatkoznak. A kutatások lemondanak az introspekció tévedhetetlenségének hipotéziséről (*Nelson*, 1996), és megpróbálnak becslést adni a metakognitív értékelés pontosságáról, amihez - a tárgyszinten - külső kritériumra van szükség. Nyilvánvaló, hogy verbális beszámoló esetén csak a metakogníció tudatos komponenseinek (metacognitive awareness) mérésére van lehetőség.

Véleményem szerint a metakognitív tudatosság kérdőívei validitást veszélyeztető módon leegyszerűsítettek. *Schraw* és *Dennison* (1994) mérőeszköze például 52 állítást tartalmaz a metakogníció különböző aspektusaira (pl. tervezés, értékelés, stratégiák hibáinak kijavítása) vonatkozóan. Az itemek értékelése az ilyen esetben szokásos Likert-skála helyett bipoláris kontinuum-skálán történt, a szerzők szerint ezzel is növelve a reliabilitást. Mivel az állítások általánosságban vonatkoztak a metakognícióra, és nem interaktív önmegfigyelésről szólnak, a kérdőív valószínűleg a metakogníció csak igen kis szeletének mérésére alkalmas.

A metakogníció fogalma alkalmas keretet nyújt a filozófiában és pedagógiában is gyakran használt 'tudatosság' megközelítéséhez. A pedagógiában a tudatosság követelményének megfogalmazása felemás: Egyrészt hangsúlyozzuk a tudatosság szerepét a tanulás több aspektusát illetően, másrészt célul tűzzük ki, hogy sokféle készség kialakuljon, amelyek működése automatizálódik. Tudatosság és automatizálódás nem zárják ki egymást, mivel a tudatosság a gondolkodás meta-szintjével asszociálható, az automatizmus pedig a tárgy-szinttel.

A tudatosság metakogníción keresztüli megközelítésének lehetősége az „érzem, hogy tudom" jelenség kutatásával válhat nyilvánvalóvá. *Nelson* (1996) szerint ez volt az egyik első metakognitív komponens, amit értékeltek. A mérések finomodása új statisztikai együttható, a Goodman-Kruskal-korreláció kifejlesztéséhez vezetett. Az, hogy az „érzem, hogy tudom" jelenség mennyire pontos előrejelzést ad a teljesítményről, több tényezőtől is függ, így például az item nehézségétől, a feladat jellegétől (*Nelson*, 1996), vagy például a felidézés és az „érzem, hogy tudom" megítélése között eltelt időtartamtól (*Koriat*, 1993). Az „érzem, hogy tudom" két rivális modellje közül *Koriat* (1993) eredményei a komputációs metaforát támogatják, szemben a „belső figyelőszolgálat" (internal monitor) metaforával. Míg a „belső figyelőszolgálat" metafora szerint van egy elkülönült folyamat, amely kideríti, hogy megvan-e egy dolog a memóriában, és van maga a felidézés folyamata, addig a komputációs metafora szerint a „tudom, hogy érzem" jelenség a felidézhetőség megítélését jelenti.

A metakogníció mérésével kapcsolatos nehézségek nagymértékben hozzájárultak ahhoz, hogy a tudásra vonatkozó tudás kutatásában az utóbbi évtizedben jelentős teret nyertek a tudatelmélet-elméletek (theory-of-mind elméletek). A tudatelmélet-elméletek középpontjában a gyermeknek az alapvető mentális folyamatokról alkotott képének vizsgálata áll. A kísérleti személyek a 3-5 éves korosztályból kerülnek ki, mivel kutatások szerint (*Estes*, 1998; *Flavell*, 2000; *Lillard* és *Flavell*, 1990) a gyermeknek mások kognitív folyamatairól alkotott képében jelentős változások következnek be ebben az időszakban. *Kiss* (1996) szerint a változás oka, hogy az elme reprezentációs elmélete négy-ötéves korban jelenik meg. Előtte a gyermek még közvetlen oki kapcsolatot tételez fel a tárgyak és mások vélekedései között.

A tudatelmélet elméletekre épülő kutatások más módszereket használnak fel, mint a hagyományos metakogníció-kutatások. A tudatelmélet kutatásokban szóbeli interjúk szerepelnek, az előforduló kognitív feladatok manipulatív vagy képi szintűek. *Flavell* (2000) szerint a metakogníció kutatására ugyanakkor feladat- és cél-orientáltság jellemző, vagyis kognitív feladatok megoldása során nyújtott teljesítmény metakognitív összetevőit vizsgálják. Flavell szerint a metakogníció és a tudatelmélet elméletei jól megférnek egymás mellett a tudásról való tudás esernyője alatta; a metakogníció alkalmazott tudatelmélet elméletnek tekinthető.

Valószínűnek tartom azonban, hogy a tudatelmélet-elméletek éles különállásában jelentősebb szerepe van annak, hogy egy szűkebb vizsgálódási területen képesek *érvényes és megbízható* információt gyűjteni a tudásról való tudásról. A metakogníció fogalma még szerteágazó és vitatott struktúrájú, s éppen ezért a konstrukt validitás nehezen biztosítható. *Astington* (1998) tanulmánya alapján az is nyilvánvaló, hogy a tudatelmélet elméletcsoport a tudásról való tudás kizárólagos elmélete kíván lenni, és a 'metakogníció'-t olyan alternatív elnevezésnek tartja, amely nem vált dominánssá.

A tudatelmélet és a metakogníció elméleteinek talajára épülő vizsgálatok gyakorlati alkalmazhatóságát illetően nem kívánom egyik irányzatot sem meghatározónak tekinteni. Amiatt viszont, hogy a metakogníció intuitív fogalma a tudásról való tudással kapcsolatban felszínre hozott eredmények befogadása szempontjából alkalmas keretnek tűnik, a továbbiakban ezt fogom használni.

A metakogníció általunk idézett egyik modellje a tárgyszint és a meta-szint szétválasztását hangsúlyozta, a másik modell pedig a metakogníció különböző, feladat-megoldási folyamathoz köthető komponenseit rendszerezte. A továbbiakban megmutatjuk, hogy a gondolkodás többszintű, és részben a metakogníció-kutatásokétól eltérő terminológiát használó modelljeiben mi a tudásról való tudás helye.

Marr (ld. *Eysenck* és *Keane*, 1997; *Leahy* és *Harris*, 1993) vizuális percepcióval kapcsolatos komputációs modellje az inger beérkezésétől a kép kialakulásáig három egymásra épülő szint együttműködését feltételezi. A hármas felépítés (implementációs (hardver-), algoritmikus és kognitív szint) a látás értelmezése mellett felhasználható a deduktív (*Overton*, 1990) és analógiás gondolkodás (*Zsigmond* és *Csíkos*, 2000) modellezésében. A kognitív szint képviseli a rendszerben a tudatosságot, a meta-szintet. A gondolkodás fejlődése *Leahy* és *Harris* (1993) szerint úgy értelmezhető, hogy sok dolog a kognitív szintről lekerül az algoritmikus szintre, és újabb szabályozási szint épülhet fölé.

Sternberg (1988) az intelligencia három komponensrendszerét különíti el, választ keresve arra a kérdésre, hogy hogyan lehet a gondolkodás egyidejűleg ön-menedzselő és kivitelező is. A modell (a már említett Nelson-Narens modellhez hasonlóan) elkülöníti egymástól a meta és nem-meta komponenseket. A nem-meta komponenseket két részre osztja: tudásszerző és kivitelező komponensekre.

A gondolkodás meta-komponenseit *Sternberg* találóan „fehérgalléros komponenseknek nevezi". Ezekre az jellemző, hogy - ahogyan azt a 2. ábrán megfigyelhettük - a tervezés, folyamat-megfigyelés és értékelés feladatát végzik. A konkrét probléma-megoldó tevékenység a végrehajtó komponensekhez (a kékgalléros gondolkodási folyamatokhoz) köthető. A számtalan végrehajtó komponens közül kiemeli azt a hármat, amelyek a következtetések, az analógiás gondolkodás alapját képező leképezések és az osztályozásokat teszik lehetővé. Vegyük észre, hogy a végrehajtó komponensek azok, amelyeket egy-egy gondolkodási forma kapcsán meg szoktunk nevezni: következtetéses gondolkodás (reasoning), analógiás gondolkodás stb. A harmadik komponensrendszer a tudásszerző komponensekből áll, melyek között három alapvetően fontos: a szelektív kódolás, a szelektív kombinálás és a szelektív összehasonlítás.

Nagy József (1998a) a metakogníciót az értelmező kognitív komponensrendszerhez köti. A *Nagy József* által leírt többszintű modell, amely az értelem fejlődését hivatott modellezni, az idegi szabályozásra épülő négy szintet különböztet meg: öröklött, tapasztalati, értékelő és értelmező komponensrendszerekről van szó.

A fejlődési modell párhuzamba állítható a kogníció szabályozási szintjeinek modelljével (ld. *Nagy*, 1998b). A metakogníció ezek szerint a legfelső szabályozási szintet jelentő leíró szabályhasználathoz köthető, amely szint a fejlődés legmagasabb fokát jelenti. A metakogníció fejlődési szempontú megközelítésének problémájára a fejezet végén visszatérünk.

A metakogníció pedagógiai jelentősége nyilvánvaló és sokoldalú. A mai iskola tananyagának kiválasztásában nem tudhatjuk, hogy milyen ismeretekre lesz szükség, és azt is csak korlátozott mértékben, hogy milyen képességekre, ám bizonyos, hogy szükség van a metakogníció fejlesztésére, és ezen belül különösen a tanulás tanítására. Az viták tárgyát képezheti, hogy milyen módon történjék a metakogníció tanítása (*Nagy*, 1998b).

Az értelem kiművelésének folyamatában közvetlenül felhasználható kutatási eredmények a metakogníció „puha" fogalmát használóktól származnak. Általában jellemző, hogy a Flavell-i értelemben vett metakognitív tudás valamely aspektusát, vagy az „érzem, hogy tudom" jelenséget vizsgálva keresnek összefüggést a metakogníció és valamilyen iskolai változó között.

Mayer (1998) a metakészség (metaskill) mint tartalomspecifikus metakognitív tudáselem bevezetésével közli eredményeit. Hangsúlyozza, hogy egy adott tartalmi területen a sikeres problémamegoldáshoz szükség van tartalomspecifikus tudásra (skill), tartalomspecifikus metatudásra (metaskill) és motivációra. A tartalomspecifikus metatudás szerepe az, hogy eldöntsük, mikor és milyen feltételek mellett kell használni a tartalomspecifikus tudást.

Everson és *Tobias* (1998) a metakogníció két fontos aspektusát emelik ki: a tudásról való (ismeret jellegű) tudást és a kogníció szabályozását. A szabályozással kapcsolatban kiemelik, hogy a saját tudással kapcsolatos becslés és a tényleges, teszttel mért teljesítmény közötti különbség egy jellemzését adja a saját gondolkodás megfigyelése képességének.

Gourgey (1998) bemutatja a metakogníció jelentőségét az oktatás néhány alapvetően fontos területén. Kezdők esetében megfigyelhető, hogy matematika feladatok megoldása esetén gyorsan választanak egy megoldási stratégiát, és aztán ahhoz ragaszkodnak; kevés figyelmet fordítva arra, hogy az a stratégia célravezető-e vagy másikra lenne szükség. Ezzel szemben a matematikusok a megoldási idő jelentős részét a probléma elemzésével és megértésével töltik, és közben több lehetséges stratégiát megvizsgálnak. Schoenfeld (1987) szerint a matematikai tudás elemei közül az oktatás főleg a matematikai tárgyi tudásra és a probléma-megoldó technikákra összpontosít, holott a sikertelen feladatmegoldás hátterében inkább a metakognícióval és az attitűdökkel kapcsolatos problémák állnak.

Schraw (1998) a metakogníció fontosságát illetően annak a véleménynek ad hangot, hogy a metakognitív készségek (metacognitive skills) több tartalmi területet fognak át és - tekintve, hogy a mérések szerint az intelligencia-hányadostól jórészt függetlenek - az iskolai fejlesztés során a tanulók közötti különbségek kompenzálásnak fontos eszköze lehet.

Sternberg (1998) a metakogníció fontosságával kapcsolatban kiemeli, hogy például a nyelvtanulás egyes területein kifejezetten hátrányos lehet a metakognitív tevékenység. Sokszor meg kell tanulnunk azt, hogy mikor kell kikapcsolni a metakogníciót. Sternberg áttekinti a szakértővé (expert) válás feltételeit is, és megállapítja, hogy számos feltétel közvetlenül a metakogníció valamelyik aspektusára utal.

1.2.5. A bizonyítási képesség mint többszintű képesség jellegű tudás

Bizonyítások megítélésének és szerkesztésének képességrendszerét bizonyítási képességnek nevezhetjük. A gyakorlatban ugyanis állítások igazságértékének meghatározásával kapcsolatban két alapvető feladatunk adódhat. Gyakran mások igazoló (bizonyító) gondolatmenetéről kell véleményt vagy ítéletet mondanunk, gyakran pedig nekünk magunknak kell bizonyítást konstruálnunk. Kutatásunk alapján nehéz megmondani, hogy a bizonyítási képesség itt definiált két alrendszere hogyan kapcsolódik egymáshoz, mivel teljesen más kognitív feladatokkal mérhető az egyik és a másik is. Tisztán elméleti alapon azonban azt mondhatjuk, hogy a bizonyítások értékelésének képessége szükségszerű feltétele a szerkesztésnek.

Állítások igazságértékének igazolását a nyelvileg megformált állításokra korlátozzuk. Bár vannak bizonyítékok arra vonatkozóan, hogy „képi állítások" igazságértékét a csecsemők körében is lehet kutatni, a kutatásunkban vizsgált korosztály szempontjából érdemes megállapításainkat a nyelvi megnyilvánulásokra korlátozni.

Alaphipotézisünk, hogy *a bizonyítási képesség többszintű, hierarchikus képességrendszer*. *Marr*-i fogalmakat is felhasználva *hardver-, algoritmikus* és *stratégia-szint*ekről fogunk beszélni. Ez a rendszer összevethető *Nagy József* (1999) hierarchikus szabályozási szintjeinek rendszerével, ahol három - a neurális szabályozásra épülő - szint szerepel: implicit tapasztalati, implicit fogalmi és explicit előíró szabályhasználatot. A bizonyítási képesség szempontjából a *Nagy József*-i implicit tapasztalati szintet a hardver-szinthez soroljuk.

A kétféle rendszer kompatibilitását a következő konkrét példákkal támasztjuk alá: 1) Explicit előíró szabályhasználat szintjéhez (= stratégia-szinthez) tartozik az a tudásunk, hogy a modus ponens következtetési szabály logikai értelemben érvényes deduktív szabály. 2) Az implicit fogalmi szinthez (= algoritmikus szinthez) tartozó példa: Ha Peti megkapja a zsebpénzét, moziba megy. Peti megkapta a zsebpénzét. Ebből következik, hogy Peti moziba megy. 3) Az implicit tapasztalati szinthez (= hardver-szint egy részéhez) tartozó példa: Ha villámlást észlelünk - anélkül, hogy tudatában lennénk - hallásunk felkészül a mennydörgés észlelésére, mivel elménkben működik egy implicit tapasztalati szabály (amely igen gyorsan implicit fogalmivá alakítható), mely szerint „Ha villámlik, akkor kis idő múlva dörög az ég." A kognitív tudományt élénken foglalkoztató vita, hogy ténylegesen léteznek-e ilyen „Ha..., akkor..." típusú szabályok a fejünkben, vagy ezek a külső szemlélő által alkotott modell elemei csupán (ld. *Pléh*, 1998).

A *hardver-szint* a gondolkodás fiziológiai alapjait és az arra épülő tudattalan gondolkodási folyamatokat jelenti. A bizonyítási képesség szempontjából ide sorolunk egyes nem-verbális (legfeljebb a gondolkodás fodori értelemben vett belső nyelvén megfogalmazott) folyamatokat, amelyek között kiemelkedő jelentőséget tulajdonítunk az oksági gondolkodás perceptuális alapjainak. Ennek rövid bemutatására vállalkozunk először. Az oksági gondolkodás azért különösen jelentős a bizonyítási képesség szempontjából, mert a verbalizált állítások és bizonyítások során „Ha..., akkor..." típusú állítások fordulnak elő, és az ilyen szerkezetű mondatok gyakran oksági kapcsolatok kifejezői.

Michotte (idézi *Csibra, Gergely* és *Nádasdy*, 2000, 60. o.) szerint „az oksági észlelés alapja a tárgyak mozgásának egysége és a tárgyak duplicitása közti konfliktus." *Csibra, Gergely* és *Nádasdy* (2000, 71. o.) kísérlete szerint az „oksági viszony nem más, mint az az információ, hogy az egyik tárgy mozgását át kell helyezni a másik tárgyra a tárgyfogalmunknak megfelelő világ koherenciájának megtartása érdekében." Az említett tárgyfogalomra az jellemző, hogy az észlelőrendszer nem tárgyakat lát, hanem mozgásokat, és ahhoz rendeli hozzá a tárgyakat. A bizonyítási képesség szempontjából tehát a hardver-szinten megtörténik a mozgások, változások észlelése, és a mozgásokhoz rendelt tárgyak vonatkozásában a hardver-szint oksági viszonyt érzékel.

A fejlődési szinteket is jelentő szabályozási szintek különböző hierarchikus képességnevezéktanok rendező szempontját jelenthetik. Az előző példánál maradva: „Ha..., akkor..." típusú állítások értelmezése és más, logikus gondolkodást vizsgáló feladatokkal kapcsolatban nem feltétlenül kell a deduktív gondolkodás három szintjéről beszélnünk; megalapozott - és *Moshman* (1990) metalogikai elméletével is teljes mértékben összhangban van - ha az implicit tapasztalati következtetések képességét például természetes logikai képességnek, az implicit fogalmi szintet deduktív gondolkodásnak, az explicit előíró szintet metalogikai képességnek nevezzük.

Az *algoritmikus szint*hez tartozó jelenségek, folyamatok meghatározása a bizonyítások során gyakran használt nyelvi-logikai eljárások ismeretét igényli. Ezek a nyelvi-logikai eljárások modellezhetők a kétváltozós kijelentés-logika műveleteivel és következtetési szabályaival. A gondolkodás ilyen szempontú modellezése a deduktív gondolkodás kutatásának területéhez tartozik.

A deduktív gondolkodás elméleti modelljei

A deduktív gondolkodás kutatása a logikai szempontból korrekt következtetések pszichológiáját igyekszik felderíteni. Nem feltételezi, hogy a gondolkodásunkban logikai struktúrák épültek be, de számot kíván adni arról, hogy mi történik, amikor egy logikus gondolkodást igénylő feladatot megoldunk. A logikai rendszerek ebből adódóan modellként és módszertani eszközként szolgálnak a kutatásban (*Overton*, 1990).

A deduktív gondolkodás főbb elméleti modelljeinek áttekintésére *Overton* (1990) tanulmánya tűnik legalkalmasabbnak, nem kis részben azért, mert sikerült kívül maradnia a sokszor csípős hangnemben zajló vitákból („Britanniában csikorgatják a fogukat", „paralogikus gondolkodás" (*Rips*, 1990, 291. o.); „Miért olyan boldog Rips...?" (*Evans*, 1990, 89. o.)).

Overton (1990) az elméletek két nagy csoportját különíti el. Az általa használt kifejezéseket (competence és procedure) nehéz megfelelően magyarra fordítani. A konkrét elméletek ismeretében a struktúra-orientált és az eljárás-orientált kifejezéseket használhatjuk (*Vidákovich*, 1998). A struktúra-orientált modellekre az angol hangzáshoz közelebbi kompetencia-modell kifejezést használom, ezzel egyrészt azt juttatva kifejezésre, hogy ezekben a modellekben találkozunk a deduktív gondolkodás műveleti leírásával, másrészt a struktúra szó szerepeltetése esetleg azt sugallhatja, hogy kizárólag a piagetiánusok tartoznak ebbe a modellcsoportba.

A kompetencia-modellekre az jellemző, hogy a gondolkodás folyamatainak modellezésére alkalmasnak tartják valamelyik logikai rendszert. Ezek szerint a deduktív gondolkodás során szabályokat alkalmazunk, amelyek valamely logikai rendszer szabályai. Azt egyik elmélet sem állítja, hogy a szabályokat explicite ismerjük; a szabályok alkalmazása tehát nem tudatos. A tudatosság már a képességek egy magasabb szintjét jelenti (*Moshman*, 1990).

A kompetencia-modellek közül elsőként a piaget-i elképzelést említem. Az eredeti elmélet számunkra legfontosabb aspektusai a fejlődés fokozatainak elve és a logikai struktúra bevezetése a pszichológiába. *Inhelder* és *Piaget* (1955/1984) szerint (ld. még *Horváth*, 1984) az értelmi fejlődés negyedik szintjén létrejön egy olyan műveleti struktúra, amely a tizenhat kétváltozós alapműveletből alkotott struktúrának feleltethető meg. A fejlődési szintekkel kapcsolatban a legtöbb támadásra az életkori határok megállapítása adott okot. Sokan bírálták *Piaget*-t azért is, mert nem foglalkozott a tartalom szerepével (pl. *Johnson-Laird* és *Byrne*, 1991), és az egyéni különbségekkel.

A szintek merevségével és életkorhoz kötöttségével kapcsolatban *Inhelder* és *de Caprona* (1990) azt írják, hogy *Piaget* a strukturalizmust csak mint módszert használta és nem mint doktrínát. Piaget mai követői nem hangsúlyozzák már az életkori határokat, hanem azt emelik ki, hogy a fejlődési fokozatok minőségi változást jelentenek, és nem felcserélhetők, nem átugorhatók. *Piaget* bírálói szeretik a régi műveket idézni, mintha a negyvenes-ötvenes években kiformálódott elméletet maga *Piaget* soha nem revideálta volna. Ez talán azzal magyarázható, hogy a hetvenes években írt tanulmányok angol nyelvre átültetése jó egy évtizedet késett. Az egyéni különbségek vizsgálatának hiánya az alkalmazott kutatási módszerekben keresendő. Ahogy *Rips* (1994) fogalmaz: a pszichometria a különbség elemzésére épül, a kísérleti pszichológia (ami alatt kis mintás, laboratóriumi módszert ért) az azonos dolgokat keresi.

A tartalom deduktív következtetésekben betöltött szerepéről - mint láttuk - máig tartó viták folynak. Egyesek kimutatnak különbségeket, mások nem, és akik igen, azok is sokféleképpen értelmezik a kapott eredményeket. Ennek fényében már másképp láthatjuk azt a tényt, hogy a „horizontal décalages" fogalmának bevezetésével Piaget láttatta az absztrakt és konkrét tartalmakon végzett műveletek eredményeiben mutatkozó különbségeket, de - mivel a struktúrák fejlődését nem bolygatták ezek a különbségek - életművében nem nyitott külön fejezet a tartalom szerepének vizsgálatára (*Inhelder* és *de Caprona*, 1990; *Ricco*, 1990).

A kompetencia-modellek közül a Piaget-i modellt emeltük ki. Ugyanehhez a szellemi áramlathoz tartoznak azok a zömmel neopiagetiánus kutatók, akik elsősorban a logikai szükségszerűség gondolkodásbeli megjelenését fejlődését vizsgálják (pl. *Ricco*, 1990; *Piéraut-Le Bonniec*, 1990; *Murray*, 1990) Ugyancsak a kompetencia-modellek közé sorolhatók a természetes logikai elméletek, amelyek megpróbálják megtalálni és formalizálni azokat a logikai műveleteket, amelyek mindenféle formális logikai képzés nélkül is kialakulnak (*Braine*, 1990; *Rips*, 1994).

A deduktív gondolkodás elméleteinek másik csoportjába az eljárás-orientált modellek tartoznak. Azok az elméleti modellek tartoznak ide, amelyek tagadják a formalizálás hasznosságát. *Cheng* és *Holyoak* (1985) szerint az úgynevezett pragmatikus gondolkodási sémák segítségével válik lehetővé a deduktív következtetés. Ilyen sémák alakulnak ki induktív úton a megengedéssel, kötelezettséggel vagy oksági viszonnyal kapcsolatban.

Az eljárás-orientált modellek között igen jelentős a mentális modellek elmélete, amelynek kidolgozása elsődlegesen Johnson-Laird nevéhez fűződik. Egyszerű szillogisztikus következtetési szabály segítségével igyekszünk megvilágítani a különbségeket a kompetencia-és a mentális modellek között. *Johnson-Laird* és *Byrne* (1991) monográfiájából való a következő példa:

1. premissza: Minden pszichológus kutató.
2. premissza: Minden kutató szkeptikus.

következmény: Minden pszichológus szkeptikus.

A következtetés annyira nyilvánvaló, hogy már az arisztotelészi örökséget továbbadó középkori iskolákban bármilyen tartalom esetére, formális szabályként („Barbara") kellett ismerni ezt a következtetési formát. A természetes logika szabályaival néhány lépés a bizonyítás, a mentális modellek elmélete szerint viszont az emberek az ilyen feladatot úgy oldják meg, hogy először valahogyan elképzelik, mentálisan reprezentálják a premisszák tartalmát. (A szillogizmusok esetében talán Venn-diagramokat képzelünk el.) Második lépésben a létrehozott mentális modellt próbáljuk meg formalizálni, míg végül olyan modelleket keresünk, amelyekben esetleg hamis a következmény. A mentális modellek elméleteinek alapelve, hogy a pszichikum által létrehozott mentális modell struktúrája ugyanaz, mint az emberi fogalmak struktúrája. A mentális modellek elmélete képesnek látszik arra, hogy a hagyományos logikai terminológiával is leírja az emberi gondolkodást (*Johnson-Laird, Byrne* és *Tabossi,* 1989; *Johnson-Laird, Byrne* és *Schaeken* 1992).

Sok jel mutat arra, hogy a deduktív gondolkodás elméleti alapjainak lerakása, bizonyos mértékű szintézise megtörtént. Az elméletek versenye inkább a természetes logika és a mentális modellek párharcára korlátozódott. A kilencvenes években egyre csökkenő számban felbukkanó új publikációk azonban jelezhetik: új szempontú szintézisre és meta-analízisre lehet szükség a továbblépéshez.

A deduktív gondolkodással kapcsolatos eredmények vázlatos áttekintése

Az áttekintés vázlatosságát az indokolja, hogy rendkívül sok kísérlet történt a deduktív gondolkodással kapcsolatban, és most a bizonyítási képesség értelmezése szempontjából fontos eredmények közül válogatunk.

A klasszikus arisztotelészi logika kétváltozós műveleteivel igen sok publikáció foglalkozott. Egy részük egészében véve, az egész struktúrát vizsgálta (általában Paiget-i alapokon) (*Braine* 1978, 1990; *Csapó, Csirikné* és *Vidákovich* 1987; *Csapó* 1992a, *Csirikné* 1986; *Gray* 1990; *Inhelder* és *Piaget* 1955/1984; *Kuhn* és *Angelev* 1976; *Neimark* és *Slotnick* 1970; *Vidákovich* 1987a, 1989a, 1990, 1996; *Vidákovich* és *Csapó* 1988). A tanulmányok más része egyes logikai kötőszókat (*Byrne* és *Johnson-Laird* 1992; *Johansson* és *Sjölin* 1975) vagy bizonyos műveleteket választott a vizsgálat tárgyának.

A kétváltozós műveleti rendszer tagjai közül az implikáció művelete az, amelyik a legkevésbé működik a pszichikumban a logikának megfelelően; nem meglepő, hogy ez szerepel leggyakrabban a kutatásokban. Pontosabban szólva, mivel elég korán kiderült, hogy az implikáció műveletét sokan a következményrelációval keverik össze, az implikáció műveletének kutatása sokszor együtt történik a következményfogalom vizsgálatával (*Bloom* és *Capatides,* 1987; *Braine* és *O'Brien,* 1991; *Emerson* és *Gekoski,* 1980; *Matalon* 1962/1990; *McCabe és mtsai* 1983; *Murray* 1990; *O'Brien* és *Overton* 1980; *Scholnick* és *Wing* 1991, 1992, 1995; *Scholnick* 1990; *Sodian* és *Wimmer* 1987; *Wing* és *Scholnick* 1981). Nem meglepő, hogy sok nyelvészt találunk a következményfogalom kutatói között, hiszen az implikáció műveletének és a következményfogalomnak összekeverése a „ha" logikai szó kétféle szerepe miatt történik elsősorban. Sokan tehát azt vizsgálták, hogy az „if" szó és jelentése hogyan határozza meg a deduktív gondolkodást.

A kialakult *if*-elméletek közül kettőt említünk most. *Braine* és *O'Brien* (1991) szerint három területet kell áttekinteni a kérdéskörben: Az *if* lexikai jelentése alapjában véve a modus ponens szabály *if*-jének felel meg. A második fontos terület a pragmatikus alapelveké: Ide tartoznak a pragmatikus gondolkodási sémák, amikor jól meghatározott tartalmak esetén tudunk megengedést, tiltást stb. (ld. *Cheng* és *Holyoak*, 1985) kifejezni az *if* segítségével. Érdemes megemlítenünk itt a *Grice*-féle kommunikációs alapelvet (ld. *Braine*, 1990; Sperber és Wilson, 1995), mely szerint a beszélő mindig a lehető leginformatívabb, igazmondó, és érthető akar lenni. „Azonos életkorú, fejlettségű, műveltségű csoporton belül a kommunikáció egyértelmű lehet, ha el is tér a formális logikától" (*Csapó, Csirikné* és *Vidákovich*, 1987, 541. o.). Az ekvivalenciának megfelelő logikai műveletet is ezért sokszor „ha ..., akkor..." formában fejezzük ki. Harmadsorban a különböző logikai rendszerek következtetési sémáinak *if*-jeit szükséges vizsgálni. A materiális implikáció problémáit különbözőképpen megoldó logikai rendszerek (ld. *Ruzsa*, 1984) modellt, módszertani segítséget nyújthatnak a következményfogalom vizsgálatához. Érdekes vizsgálat volt annak megmutatása, hogy következtetésünk nem a releváns logika szerint működik (*Vidákovich*, 1989b). *Piaget* szerint az *Anderson* és *Belnap*-féle következményfogalom vizsgálata a leggyümölcsözőbb a pszichológia számára (ld. *Piéraut-le Bonniec*, 1990).

A másik nevezetes, és elsősorban nyelvészeti alapokon álló *if*-elmélet *Scholnick* (1990) nevéhez fűződik. Az if szerinte három arccal rendelkezik: kijelentéslogikai, szemantikai és az előfeltételezést kifejező arculatokkal. Szerinte a logikai arculat vizsgálatánál négy kérdést kell vizsgálnunk: 1) A műveletek és következtetések izoláltak, vagy koherens rendszerük van? 2) A következtetések a gondolkodásunkban igazságtábla szerint, következtetési séma alapján vagy más módon működnek? 3) A nyelv vagy a kogníció a deduktív gondolkodás alapja? 4) A dedukció velünk született képesség, vagy a világ megtapasztalásából épül fel? Az *if* második arca szemantikai. A hétköznapi nyelvhasználatban a „ha" a természetes logikai megközelítésnek megfelelően működik. A „ha" hétköznapi használata a nyelvi képességektől és a felhalmozott tapasztalattól függ, és logikai szempontból „a valóság talaján álló", hihető (sound) állításokra korlátozódik. A harmadik arculat az előfeltételezéseké, vagyis a „ha" használata azt tükrözi, hogy a premisszák tartalma nem feltétlenül igaz, de akár igaz is lehet, és ezért érdemes elemezni a lehetséges következményeket.

Az if-elméletek áttekintése után most arra vállalkozunk, hogy összegyűjtsük azokat a fontos tényezőket, amelyek miatt a bizonyítási képesség szempontjából algoritmikus szintűnek számító deduktív gondolkodás nem a kétváltozós logikai igazságtáblának megfelelően működik. Ezekre a tényezőkre az előzőekben már utaltunk, most csak a rendszerezés a cél:

1) A deduktív gondolkodást vizsgáló feladatokat a kísérleti személyek túlbonyolítják. A túlbonyolítást ki lehetett mutatni a Wason-féle kártyaszelekciós feladat megoldása során is (*Csíkos*, 1999a).

2) A logikai műveletben és következményreláció kifejezésére egyaránt használt „ha" szó többrétegű jelentése befolyásolja a deduktív gondolkodást vizsgáló feladatokon nyújtott teljesítményt.

3) A kommunikáció során gyakran érdemes eltérni a logikai kötőszavak igazságtábla szerinti értelmezésétől, mert ezzel közlésünk megbízhatóbbá és relevánsabbá válhat.

4) A legegyszerűbb és már egészen kicsi gyermeke által is helyesen használt logikai kötőszavak esetében a feladatmegoldás kontextuális hatásai is jelentősek. („Miért kérdezik ezt tőlem? Csak nem valami trükk van a feladatban?")

A deduktív gondolkodás elméleteinek áttekintésével megmutattuk, hogy a bizonyítási képesség algoritmikus szintjén is olyan gondolkodási folyamatok zajlanak, amelyek egyértelmű leírása még nem történt meg. A következőkben megmutatjuk, hogy a stratégia-szint fejlettsége is befolyásolja az algoritmikus szintű gondolkodást vizsgáló feladatokon nyújtott teljesítményt.

Meta-logika, meta-dedukció

A bizonyítási képesség *stratégia-szint*jének áttekintését a deduktív gondolkodással kapcsolatban használt 'meta-' fogalmak értelmezésével kezdjük. *Johnson-Laird* és *Byrne* (1991) metalogikának nevezik a logikáról szóló explicit tudást, és metadedukciónak azt a képességünket, hogy tudunk mások dedukcióiról gondolkodni. *Moshman* (1990) felfogása szerint metalogikai stratégiákat és metalogikai megértést különíthetünk el. A két nevezéktan közös vonása, hogy mindkét modell a deduktív gondolkodás egyszerűbb összetevőiből építkezik, valamint egyik sem szól arról, hogy hogyan lehet a metalogika illetve metadedukció fogalmát a metakogníció általános fogalomkörébe beilleszteni.

A deduktív gondolkodás meta-szintjét jelentő metalogika és metadedukció egymással sem kompatíbilis fogalmak. A metalogika *Moshman* (1990) szerint a deduktív gondolkodás fejlődésének azt a szintjét jelenti, amikor az egyén képes tudatosan megkülönböztetni a premisszákat és a konklúziót, s ezzel képessé válik metalogikai stratégiák használatára. Egy metalogikai stratégia például a reductio ad absurdum bizonyítási séma használata. A metalogikai gondolkodás másik aspektusa Moshman szerint a metalogikai megértés, amely azt jelenti, hogy az egyén képes a logika természetéről, a logikai és a természetes nyelvek kapcsolatairól gondolkodni. A moshmani nevezéktan két fogalma, a metalogikai stratégiák és a metalogikai megértés, emlékeztet Flavell metakogníciós elméletére, amelyben metakognitív tudásról és metakognitív tapasztalatról ír.

A metadedukció fogalomköre a mások dedukcióiról való gondolkodásra utal. Ezzel kapcsolatban annak az észrevételünknek adunk hangot, hogy 1) A mások dedukcióiról való gondolkodás állandóan jelen van a gondolkodásunkban (*Rips* (1994)), és 2) meg kell különböztetni a mások dedukcióiról gondolkodást hétköznapi környezetben és a laboratóriumok logikai fejtörőinek megoldása közben. Úgy tűnik ugyanis, hogy a metadedukció fogalom a *Smullyan* (1978/1988), majd a pszichológiai hátteret illetően *Rips* (1983) által divatba hozott logikai puzzle-ök elemzésére használatos. Eredményeink alapján úgy véljük, a logikai fejtörők megoldása során a kontextus hatása rendkívül nagy. A Johnson-Laird által használt metadedukció flavelli értelemben valóban meta-tudás, amennyiben a logikai fejtörők megoldásának pszichológiai hátterét értjük alatta.

A bizonyítási képességet tekintve, a stratégia-szint felelős azért, hogy eldöntsük, egy adott állítás igazolására felhasználjuk-e a deduktív gondolkodási algoritmusokat, vagy sem. Nyilvánvaló, hogy ehhez nem elegendő, ha a dedukció meta-összetevőit tekintjük ide tartozónak. Elfogadjuk ugyanakkor, hogy a metalogikai stratégiák és a metalogikai megértés, valamint a metadedukcióval jelölt gondolkodási folyamatok beletartoznak a bizonyítási képesség stratégia-szintjébe. Ezeken kívül azonban még szükséges, hogy rendelkezzünk a bizonyítással kapcsolatos modellekkel (ld. 1. ábra), amelyek flavelli értelemben a metakognitív tudáshoz tartozó elemek.

1.3. A bizonyítási képesség fejlődése

1.3.1. A fejlődési modell *circulus vitiosus*- a

Minden fejlődési folyamat értelmezése magában rejt egy belső vagy külső kritériumot, amelyhez a fejlődésmenet viszonyítható. A kritériumok megfogalmazása azonban a körben forgó okoskodás csapdáját rejtheti magában. Konkretizálva a problémát a bizonyítások területére: A legértékesebbnek tartott bizonyításforma vajon azért a legértékesebb, mert hatékony és célravezető, vagy azért, mert a társas környezet meggyőződhet arról, hogy a bizonyítást adó személy gondolkodása fejlett?

Ha elfogadnánk azt az alapelvet, hogy az egyén bizonyításainak értékességét az szabja meg, hogy mennyiben felel meg a társadalmi-kulturális szempontból értékesnek tartott bizonyításoknak, akkor a bizonyítási képesség fejlődésének modellje megfelelne a későbbiekben felvázolandó evolúciós bizonyítás-fejlődési modellnek. Az evolúciós bizonyítás-fejlődési modellben nyilvánvaló, hogy a deduktív bizonyítások képviselik a fejlődés végpontját, de kérdéses, hogy egy százezer évvel ezelőtti társadalmi keretben a tekintélyelvű vagy az empirikus bizonyítások számítottak-e jobbnak. Mivel nincs közvetlen oksági kapcsolat az emberiség gondolkodásának fejlődése során bejárt út és az egyedfejlődés között, más forrásból kell meríteni egy olyan egyedfejlődési modell legitimitását, amely a deduktív bizonyításokat tartalmazza a legfejlettebb formaként.

Az egyes bizonyítástípusok megjelenési gyakorisága szerint az egyedfejlődésben a tekintélyelvű - empirikus - deduktív sorrendet tételezzük fel. A fejlődési modell circulus vitiosus-a ott lehet elrejtve, hogy vajon a leírt egymásutániság kognitív szempontból egyre nehezebb bizonyításokat jelent-e. Önmagába visszatérő okoskodás lenne azt mondani; hogy igen, és azért, mert az egyedfejlődés során nyilvánvalóan a kognitív szempontból bonyolultabb forma jelenik meg később. (Ráadásul több vizsgálat azt a meglepő eredményt hozta, hogy bizonyos gondolkodási formákat vizsgáló feladatokban nyújtott teljesítményben visszaesés mutatkozhat egyes életkori szakaszokban.)

A circulus vitiosus csapdája így egyszerűsíthető:

Azért későbbi egy bizonyítási fajta, mert kognitív bonyolultsága nagyobb.
A kognitív bonyolultságot az mutatja, hogy a bizonyításfajta később jelenik meg.

A körben forgó okoskodás feloldásának módja az, hogy megmutatjuk, valamilyen szempontból bonyolultabbak a deduktív bizonyítások az induktív bizonyításoknál. Ehhez először meg kellene húzni a határvonalat az induktív és a deduktív bizonyítások között. Olyan esetekben azonban, amelyekben nem tartalmaz az állítás univerzális kvantort, ez meglehetősen nehéz feladat.

Ha egy állítás kimondja, hogy „létezik háromlábú veréb", akkor empirikusan ez úgy bizonyítható, hogy mutatunk egyet. A deduktív bizonyítás formai szempontból ugyanígy nézhet ki: mutatunk egy háromlábú verebet. Deduktívvá attól válhatott a bizonyítás, hogy a válaszadó tudja, egy létezést kimondó állítás bizonyításához elegendő egy példát adni. Vagyis ebben az esetben a feladatmegoldás folyamatában rejtve maradhattak olyan stratégia-szintű elemek, amelyek lehetővé tették a megfelelő algoritmikus szintű megoldási folyamat kiválasztását.

Egy újabb példa: „Igazold, hogy a Dunántúl egykor a Római Birodalomhoz tartozott!" Az induktív bizonyítás ebben az esetben azt jelenti, hogy példákat hozunk római kori építményekre, földrajzi nevekre. Formai szempontból a deduktív bizonyítás során is ez történik, de abban az esetben a bizonyítás implicit részét képezi, hogy a régészet módszerei szerint néhány egymással összeegyeztethető régészeti emlék nagy valószínűséggel alátámaszt adott időszakról szóló állításokat. Itt is arról van szó, hogy formai szempontból azonos bizonyítások esetén azt minősítjük deduktívnak, amely esetében a stratégia-komponensek úgy választják ki a megfelelő algoritmikus folyamatokat, hogy a logikai szükségszerűség jelen legyen.

A logikai szükségszerűség viszonylag későn jelenik meg a gondolkodásban. Ennek oka a piagetiánusok szerint, hogy csak a formális műveleti szint elérésével válik lehetővé a logikai szükségszerűség értelmezése. Ez a neopiagetiánus gondolat lehet a kulcs a circulus vitiosus föloldásához: A logikai szükségszerűség kialakulása tehát nem csak időrendi követője az egyszerűbb logikai műveletek megjelenésének, hanem annak következménye. Így a körben forgó okoskodásban szereplő két állítás közül az elsőt tartjuk meg kiinduló állításként, és a másodikat tekintjük következménynek.

A képességfejlődés leírása során ezért a kognitív bonyolultság szempontjából kell kritériumokat felállítani. Megelégedhetünk-e azzal, hogy az átlageredmények javulnak (a normális eloszlásgörbe kissé jobbra tolódik), vagy külső kritériumhoz igazítjuk a fejlesztés sikerességének megítélését? Azok a fejlesztő kísérletek, amelyek az átlagra és szórásra épülő „kísérleti hatás" konkrét számadatával jellemzik a tréning hatékonyságát, a norma-orientált értékelés talaján állnak.

Akár norma-orientált, akár kritérium-orientált szemléletű a képességek fejlődésének értékelése, szükséges egy fejlődési modell felállítása, amely az értékelés során kritériumként szolgálhat. Egy ilyen kritérium lehet a fejlődés belső logikája, amely az egyszerű lineáris algoritmusú készségekből kiindulva a komplex képességekig leírja a fejlődés menetét. A képesség jellegű tudás elemei ilyen egymásutánjának leírására használta *Lénárd* (1989) a „hierarchikus rendszer" kifejezést. Szerinte „a magasabb rendűt [képességet] csak abban az esetben lehet kialakítani, ha a tanuló már rendelkezik az alacsonyabb rendű képességgel".

Nagy József már 1968-ban megjelent tanulmányában - a készség és jártasság fejlettségi szintjének meghatározásakor - felvetette *külső kritérium* bevonásának szükségességét. Szerinte a tempó és minőség vonatkozásában adhatók meg ilyen kritériumok: *a felnőtt szakember tempója és az abszolút hibátlanság.* Ezen kritérium-rendszer finomításával és továbbfejlesztésével találkozhatunk egy 1999-ben megjelent tanulmányában is (*Nagy*, 1999). A *tempó* mint a képesség fejlettségének jellemzője továbbra is szerepet kap; a felnőtt szakember teljesítménye helyett az úgynevezett antropológiai optimum szerepel viszonyítási pontként. A *minőség* mint kritérium új értelmezése pedig az elérendő szabályozási szint meghatározását is magában foglalja.

A képességek fejlődésének vizsgálata során tapasztalhatjuk, hogy egyes feladatok megoldása során a hatévesek körülbelül olyan jól teljesítenek, mint a felnőttek, de feltételezhetően teljesen más gondolkodási folyamatok állnak a háttérben (*Moshman*, 1990). Megfigyelhető, hogy bizonyos algoritmusokat a gyermekek ugyanolyan jól tudnak használni, mint a felnőttek, ám jelentős különbséget tapasztalunk abból a szempontból, hogy tudják-e, mikor célszerű használni azt az algoritmust, és annak eldöntésében, hogy az algoritmus célravezető-e. Ez a gondolatmenet elvezethet oda, hogy az algoritmus szintjén működő képesség jellegű tudás mellett szükség van olyan tudáskomponensekre, amelyek szabályozzák az algoritmikus komponenseket. Az irányító, szabályozó komponensekkel kapcsolatosan két 'meta-' elméletet említünk, amelyek egy XXI. századi többszintű pedagógiai képességfogalom előfutárainak tekinthetők.

Amikor a képességek fejlődését igyekszünk jellemezni, figyelembe kell vennünk a fejlődéslélektan területét érintő mélyreható paradigmatikus váltásokat is. Ezek közül most kettőre utalunk: 1) a többszintű tudásmodellek megjelenése, 2) az evolúciós szempontú megközelítés.

A többszintű tudásmodellek megjelenése nyomán a fejlődési modellekben megkerülhetetlenül helyet kell kapniuk a gondolkodás meta-komponenseinek is. Már a pszichometria aranykorában voltak adatok arra vonatkozóan, hogy teljesen különböző képesség-területeken elért eredmények között nagyon szoros korrelációk vannak (ez a „pozitív sokszorozódás" /positive manifold/ jelensége). Ezek az eredmények jól értelmezhetők a többszintű képességmodellek segítségével. Nem helytálló ugyanis az a feltételezés, hogy a meta-szintű komponensek fejlődése az algoritmikus szint bizonyos fejlettségét elérve válik lehetővé. A képességek különböző hierarchikus szabályozási szinthez tartozó komponensei egymást segítve, egymás mellett (in tandem) fejlődnek (*Karmiloff-Smith*, idézi *Estes*, 1998).

Egyelőre a képességek fejlődésének mérése a különböző szintű komponensek elkülönült mérését jelenti. A képességkutatás perspektíváinak gazdagságát már az is hűen illusztrálja, hogy a 'meta-' és nem-meta-' komponensek fejlődésének külön-külön történő mérése is élénken kutatott terület.

A képességek fejlődésének evolúciós szempontú megközelítése (*Piatelli-Palmarini*, 1996) hangsúlyozza, hogy a fejlődés mint gazdagodási folyamat nem kívülről jövő gyarapodásként értelmezhető, hanem belső szelekciós mechanizmusok eredményeként. Különösen érdekes, hogy az egyedfejlődés során sok esetben végigjárjuk azt az utat, amit az emberiség biológiai és kulturális fejlődéstörténete során már bejárt. Noha *Gellatly* (idézi *Nelson*, *Plesa* és *Henseler*, 1998, 9. o.) szerint hiba volna közvetlen oksági kapcsolatot feltételezni az egyedfejlődés és a kulturális-történelmi fejlődés hasonló fázisai között, az evolúciós megközelítésmód felhívja a figyelmet a képességfejlődés kulturális meghatározottságára.

A bizonyítási képesség háromszintű modelljének komponensei közül a hardver-szint fejlődésével a továbbiakban nem foglalkozunk. Az idegrendszer épsége adottságnak tekinthető, az implicit fogalmi gondolkodásra pedig nem terjesztettük ki vizsgálatainkat. Bár egyes elméletek azt hangsúlyozzák, hogy maga az intelligencia voltaképpen az agyi információfeldolgozás sebességével rokonítható (*Anderson*, 1992), pedagógiai szempontból nagyon fontos azoknak a tényezőknek a vizsgálata, amelyek nem tekinthetők adottságnak.

A bizonyítási képesség algoritmikus szintjén találjuk az elemi következtetési folyamatokat. Ide tartoznak a logika szabályainak megfelelő (más szóval deduktív) következtetések, a plauzíbilis következtetések és más nem-deduktív következtetési formák. Mivel deduktív bizonyítások konstruálásakor a stratégia-szint irányítása alatt a deduktív következtetési sémák aktivizálódnak, a következőkben a deduktív gondolkodás fejlődéséről lesz szó, különös tekintettel az érzékeny életkori szakaszokra és a szükségszerűség megjelenésére.

1.3.2. A deduktív gondolkodás fejlődése

Moshman (1990) szerint sokszor okozott meglepetést a kutatóknak, hogy bizonyos feladatokban a hatéves gyerekek már igen jó teljesítményt nyújtottak, és ugyanakkor (más feladatokban) a felnőttek néha egészen gyönge eredményeket produkálnak. Sokszor valóban úgy tűnik, hogy egy hatéves gyermek már mindent tud a logikus gondolkodásról, ami logikai tanulmányok nélkül tudható, ám nehezíti az összehasonlítást a későbbi életkorokkal, hogy az írni-olvasni tudó gyermekek sokszor papír-ceruza teszteket kapnak a kísérletekben.

Markovits, Schleifer és *Fortier* (1989) szerint már 5-6 éves korban képesek a gyermekek néhány szillogisztikus probléma megoldására, de az a képességük, hogy megbízhatóan különbséget tegyenek a logikailag összefüggő és össze nem függő premisszák között, csak 11 éves korra alakul ki. *Sodian* és *Wimmer* (1987) megmutatták, hogy a 6 éves kor is egy fordulópontot jelent: a 4-5 évesek még nem tudják megfelelően értékelni más embereknek azt a képességét, hogy a premisszákból kikövetkeztethetik a konklúziót.

10-12 éves korban még drámaibb változásokat regisztráltak a kutatások. *Markman* (1978) szerint 11 éves korig az empirizmus a meghatározó, és ekkortól veszik át a főszerepet a logikus megoldások. Ekkortól jellemző (ld. *Osherson* és *Markman*, 1975) a kontradikciók és tautológiák empíriától elszakadó értelmezése. A „következtetés validitása" fogalom fejlődésmenete is 10-12 éves korban gyorsul föl (*Moshman* és *Franks*, 1986). A „because" ('mert') és „if" ('ha') megértését vizsgálva az ugrásszerű fejlődés valamivel korábbra, 8-10 éves korra esett (*Emerson* és *Gekoski*, 1980).

Acredolo és *Horobin* (1987) szerint a deduktív gondolkodás fejlődése 5. és 6. osztály között, vagyis nagyjából 11 éves korban gyorsul föl jelentősen. *Bereiter, Hidi* és *Dimitroff* (1979) a verbális képességek fejlődését elemezve azt találta, hogy 10 éves korra a gyermekek képesek megtalálni a logikus érvelés határait és azon belül maradni.

A következményfogalommal kapcsolatban a „logikai szükségszerűség" megjelenése kulcsfontosságú fejlődési momentum. *Moshman* és *Timmons* (1982), valamint *Murray* (1990) szerint a logikai szükségszerűség megértése hosszú fejlődés eredménye, amely 13 éves kor utánig elhúzódik. A szükségszerűség kialakulásának kutatói egyrészt olyan állításokat értékeltetnek a kísérleti személyekkel, amelyekben a tapasztalat és a logikus következtetés egymásnak ellentmondó lehet, másrészt a nem egyértelműen determinált végeredményű feladatokban nyújtott válasz szükségszerűségét vizsgálják. Egy ilyen utóbbi típusba tartozó kísérlet során *Murray* és *Armstrong* (idézi *Murray*, 1990) azt találták, hogy kilencedik évfolyamosok már világosan tudják ilyen feladatok esetén, hogy mi szükségszerűen igaz, és mi nem.

A szegedi kutatások eredményei (ld. *Csapó, Csirikné* és *Vidákovich*, 1987) is megerősítették, hogy a tizenhat kétváltozós klasszikus logikai művelet közül egyesek mindenki által biztosan elsajátítottak, míg mások (implikáció, ekvivalencia, diszjunkció) még 14 éves korra sem működnek az igazságtáblázatoknak megfelelően.

Csirikné (1987) érdekes és meglepő adatokat közöl arról, hogy bizonyos logikai következtetési szabályokban 10 és 14 éves kor között visszaesés mutatkozik, majd a fejlődés 17 éves korig ismét pozitív irányú. Hasonlóan meglepő negatív fejlődési tendenciákról *O'Brien* és *Overton* (1980) valamint *Wildman* és *Fletcher* (1977) is beszámolnak. A visszaesések egyik lehetséges magyarázata a fejlődés lépcsőfokai (nem okvetlenül struktúrák) közötti átmenet lehet. Éppen az átmeneti időszak pontosabb megismerése miatt *Moshman* és *Timmons* (1982) hangsúlyozzák a longitudinális vizsgálatok fontosságát.

A deduktív gondolkodás fejlődésével kapcsolatos adatok áttekintésével bemutattuk, hogy a bizonyítási képesség algoritmikus szintjén nagyjából 6 és nagyjából 12 éves kor tájékán „történik valami". A jelenlegi kutatások feladata eldönteni, hogy ezek a változások a hardver-szint vagy a stratégia-szint felől indulók, esetleg endogén változások. Valószínűsíthető, hogy mindhárom tényezőt figyelembe kell vennie egy szintézisre törekvő elméletnek.

A bizonyítási képesség stratégia-szintjének fejlődése az algoritmikus szinttel szoros összefüggésben fejlődik. Nem helytálló az a feltételezés, hogy a meta-szintű komponensek fejlődése az algoritmikus szint bizonyos fejlettségét elérve válik lehetővé. Hangsúlyozni kell, hogy a képességek különböző hierarchikus szabályozási szinthez tartozó komponensei egymást segítve, egymás mellett (in tandem) fejlődnek (*Karmiloff-Smith*, idézi *Estes*, 1998).

A bizonyítási képesség fejlődését úgy képzelhetjük el, hogy a világról való tudásunk egyre több esetben teszi lehetővé a következtetéses gondolkodást ($\Rightarrow$ hardver-szintről induló változás). Különböző tartalmi területeken egyre gyakrabban válik lehetővé az is, hogy egy állítás igazságértékét más állításokéra vezessük vissza. A fejlődés első szintjét az jelenti, hogy szekunder forrásokra (általában egy tekintélyesebb személyre) hivatkozunk. Az induktív (empirikus) szinten már nem tartjuk elegendőnek a tekintélyre hivatkozást, hanem igyekszünk olyan adatokra, tényekre hivatkozni, amelyek alátámasztják állításunkat. A deduktív bizonyításokban a bizonyítandó állítást olyan módon vezetjük vissza más állításokra, hogy az eredeti állítás igazsága már ezektől az - általában egyszerűbben belátható - állításoktól függjön. Attól kezdve, hogy a deduktív bizonyításokról kialakul egy modell, a stratégia-szint szerepe a további fejlődés generálásában meghatározó lehet.

A fejlődés evolúciós hasonlatát alkalmazva azt mondhatjuk, hogy egy adott személy egy bizonyos tartalmi területen először általában tekintélyelvű, majd empirikus, végül deduktív bizonyítást képes adni. Ha adott tartalmi területen, adott kultúrában és adott kontextusban egy bizonyításfajta nem jól működik, akkor életbe lép az evolúció törvénye: A gyenge elpusztul, az erős fennmarad. Mivel azonban mind a kultúra, mind a kontextus, mind a tartalom meghatározza a szelekciós mechanizmusokat, a kutatónak egy vagy két tényezőt rögzítenie kell ahhoz, hogy a fennmaradó(k) hatásáról valamit mondani tudjon.

Egy adott személy különböző tartalmi területeken adott bizonyításaira a sokszínűség jellemző. A saját érdeklődési területen a legtöbben képesek vagyunk a tekintélyelvűnél magasabb szintű bizonyításokat adni, de a számunkra idegen területen jobbnak látjuk, ha szekunder forrásra hivatkozunk. Érdekes kutatási kérdés, hogy hogyan lehet jellemezni azokat a tartalmi területeket, ahol magasabb szintű bizonyításokat tudunk adni, és hogyan azokat, ahol csak alacsonyabb szintűeket.

Hangsúlyozni kell, hogy a bizonyítási képesség fejlődése egy adott kultúrában, és a kontextus által befolyásoltan zajlik. A kultúra hatása megmutatkozik abban, hogy az enkulturáció iskolai folyamataiban a tanulók megtanulják (rájönnek?), hogy milyen típusú gondolatmenet tekinthető jó bizonyításnak, és milyen érvelési formák elfogadhatatlanok egy adott korosztályban. A bizonyítási képesség fejlődésében a külvilág visszajelzései nagymértékben meghatározóak. A kontextus szerepének jellemzésére „A bizonyítási képesség értékelésének problémái" fejezetben külön kitérünk majd.

1.3.3. A bizonyítások evolúciója és kulturális különbségei

A bizonyítási képesség fejlődésének értelmezéséhez megkerülhetetlenül hozzá tartozik az evolúciós szempontú megközelítés. A bizonyítási képesség fejlődése ugyanis három rendszerben is értelmezhető: az emberiség kulturális evolúciójának rendszerében, az egyes kultúrák fejlődésében, és az individuumok szintjén; és mindhárom rendszerben megfogalmazható az evolúciós szempontú megközelítés elmélete.

Érdekes lehetőség párhuzamot vonni a három rendszerben történő fejlődési vonalak között. Hasonlóan ahhoz, ahogyan a természettudományos tévképzetek esetében feltűnő egyezés van a tudománytörténeti fejlődésmenet és az egyén fogalmi rendszerének fejlődésében (ld. *Korom*, 1997), érdekes hasonlóság adódhat a bizonyítási képesség esetében is. A fejlődés azonban a három rendszerben más-más mozgatórugókra vezethető vissza. *Gellatly* (idézi *Nelson, Plesa* és *Henseler*, 1998, 9. o.) egyenesen azt állítja, hogy „hibát követ el az, aki egyenlőséget tesz az egyéni fejlődések, változások és a tudománytörténeti változások közé."

Az emberiség gondolkodásának fejlődésével kapcsolatosan az egyik fontos kérdés, hogy mi tette szükségessé és lehetővé a magasabb rendű értelmi működés kialakulását. Az evolúciós pszichológia három magyarázó elvet alkalmaz az emberi megismerés kialakulásával kapcsolatosan (ld. *Pléh*, 1998), amelyek a bizonyítási képesség evolúciója szempontjából is relevánsak. Ezek közül a második és harmadik alapelvvel kapcsolatban teszünk értékelő megjegyzéseket.

- „Ami fennmarad, annak funkciója van." Az evolúciós megközelítésmódnak tehát számot kell adnia arról, hogy mi a funkciója a magasabb rendű értelmi műveleteknek a túlélés szempontjából.
- „Minden lelki jelenségnek szelekció és harc a magyarázata". Ezen alapelv szerint a jelenleg létező gondolkodási struktúrákkal kapcsolatban számot kell tudnunk adni arról is, hogy miért jobbak (az egyed vagy a faj túlélését nagyobb valószínűséggel biztosítók), mint más gondolkodási módok.

Cosmides (1989) leszögezi, hogy a mai ember gondolkodásának megértéséhez nem a mai környezethez alkalmazkodást kell vizsgálni, hanem a vadászó-gyűjtögető életmód földrajzi-társadalmi közegét. Ezért meg kell néznünk, hogy a vadászó-gyűjtögető életmódhoz milyen alapvető következtetési séma tartozik. Tanulmányának címe („A társadalmi csereüzlet logikája") erre utal. Evolúciós előnyt az jelent, ha az ember képes felismerni a csalókat és azokat, akiket nem lehet rászedni. Ezt a kettős feladatot „Ha ..., akkor…" típusú állításokkal modellezhetjük, és ezeket a szabályokat, valamint a választási lehetőségeket megfeleltethetjük a Wason-feladatban szereplő szabálynak és a kártyáknak. Így egy evolúciós alapú megközelítés képes számot adni a Wason-féle kártyaszelekciós feladatban előfordult furcsa kísérleti eredményekért.

Braine (1990) a deduktív gondolkodás fejlődésével kapcsolatban szintén a természetes kiválogatódás elvével indokolja, hogy a logika szempontjából valid következtetési sémák elsajátítása előnyt jelentett. Braine azonban nem százezer években, hanem csupán évszázadnyi távlatokban gondolkodik. Mivel azonban valószínűleg kevés néhány száz év ahhoz, hogy a biológiai szelekciós mechanizmusok segítségével nagyobb túlélési esélyt kapjon egy magasabb rendű gondolkodási forma megjelenése, *Braine* modelljének más (implicit) következményét hangsúlyozzuk. Mivel néhány száz év kevésnek tűnik az előnyös mutáció megjelenéséhez és elterjedéséhez, ezért azt kell feltételezni, hogy a magasabb rendű értelmi művelethez szükséges „hardver" már hasonló volt a történelmi korok hajnalán a mostanihoz.

A fejlődés a történelmi időszakban elsősorban a kulturális környezet hatására következhetett be, és a több lehetséges gondolkodási séma közül végül kiválasztódtak azok, amelyeket a mai ember használ. A kulturális környezet szerepének hangsúlyozása ugyanakkor rámutat arra, hogy a gondolkodás történelmen átívelő fejlődésére nem ad jó magyarázatot a biológiai evolucionizmus, hanem a fejlettebb gondolkodási formák megjelenése inkább kultúra-függő.

Az egyes kultúrákon belül a bizonyítási képesség fejlődését a kísérleti pszichológia és a kultúrtörténet segítségével közelíthetjük meg. Ezen a területen mind a mai napig rendkívül nagy hatásúak *Lurija* (1975) megfigyelései. A Szovjetunióhoz csatolt közép-ázsiai köztársaságok lakói körében a harmincas években végzett kutatások bizonyították, hogy adott kultúrában más-más gondolkodási forma minősülhet értékesnek. Témánkhoz szorosan kapcsolódik a szillogizmusokkal kapcsolatos kísérlet:

$$\text{premisszák}\begin{cases}\text{Északon, ahol örök hó van, minden medve fehér.}\\ \text{X helység északon van.}\end{cases}$$

Fehérek-e ott a medvék vagy sem?

Ez a szillogisztikus következtetési példa a közép-ázsiai lakosok számára a közvetlen tapasztalattól elszakítottnak számított. A válaszok részben tekintélyelvű érvelések voltak („Kérdezzen meg egy öregembert X faluban…"), részben pedig induktívak, vagyis hazugságként értékelte volna a kísérleti személy, ha saját tapasztalat nélkül következtetést von le. Ugyanakkor a tapasztalatukhoz közel álló téma esetén már képesek voltak jó választ adni, de a gondolkodás útja ebben az esetben is teljesen más volt, mint amit a mi kultúrkörünkben magasra értékelünk.

Lurija (1975, 40-41. o.) szerint „a pszichikus tevékenység magasabb rendű formái… eredetüket tekintve társadalomtörténetiek." A kultúrtörténeti megközelítéssel kapcsolatosan *Klix* (1985, 297. o.) gondolatát idézzük: „Ha egy új megoldás érvényesült, az egyben mindig a teljesítőképesebb is volt. Kognitív álláspontról racionálisabb, társadalmi szempontból nézve eredményesebb volt." Rendkívül érdekes a *Klix* által érintett két szempont kapcsolódása. Vajon azért nevezünk kognitív szempontból egy eljárást racionálisnak, mert társadalmi szempontból eredményesebb?

A kulturális különbségek kezelése a gondolkodás fejlődésének vizsgálatában kiemelt fontosságot kapott az Amerikai Egyesült Államokban. Miután az intelligencia-vizsgálatok megmutatták, hogy a fehér és fekete lakosság eltérő teljesítményt nyújt, igyekeztek megtalálni azokat a feladatokat, amelyek elfogultak (biased) valamely társadalmi csoporttal szemben. Ez az elfogultság arra a különbségre vezethető vissza, amely a különböző társadalmi csoportok *átlaga* között fennáll (ld. pl. *Neisser és mtsai*, 1996).

Helms (1992) szerint a képességtesztek megoldásában mutatkozó különbségek nem csupán arra vezethetők vissza, hogy egyes feladatok könnyebbek, mások nehezebbek az adott csoporthoz tartozók számára, hanem egyes esetekben a helyes megoldás megítélése is kultúrafüggő. „Sok fekete nincs arra szocializálva, hogy feltételezze, a tanárok értékelik az egyszerű, nyilvánvaló választ, és azt gondolják, hogy a hosszabb, kreatívabb válasz az értékesebb" (*Helms*, 1992, 1097. o.)

Az egyén kognitív fejlődésének rendszerében is megfogalmazható az evolúciós álláspont. *Piatelli-Palmarini* (1996, 231. o.) így fogalmaz: „A fejlődési probléma kulcsa manapság az, hogy belső szelekció révén megszabaduljunk a felesleges dolgoktól, és a szelektív ontogenetikus felépülés során sokkal összetettebb struktúrákat hozzunk létre." Ez a felfogás szembehelyezkedik azzal a korábbi nézettel, hogy általános jellegű velünk született elemi tulajdonságokat keressünk, amelyből egy „gazdagodási" folyamatban jönnek létre összetettebb tulajdonságok. Az új evolúciós fejlődési felfogás természetesen elfogadja, hogy bizonyos szempontból az életút során létrejövő struktúrák összetettebbek, mint amilyenek a fejlődés kiindulópontján vannak. A lényeges elem azonban az, hogy feltételez egy gazdag veleszületett repertoárt (*Piatelli-Palmarini* a tanulás mechanizmusait az immunrendszer fejlődésével állítja párhuzamba), amely belső szelekción megy keresztül. A gondolkodással kapcsolatos szelekciós mechanizmusok megjelenhetnek a neuroanatómiai szinten, az agy érésével kapcsolatban (*Karmiloff-Smith*, 1996), de a magasabb rendű kognitív műveletek vonatkozásában is.

Ha az egyén szintjén a bizonyítási képesség fejlődését evolúciós hasonlattal írjuk le, akkor a bizonyítási képesség magasabb szintű komponenseire fókuszálva a következő munkahipotézist fogalmazhatjuk meg: Különböző tartalmakon sokféle bizonyítási sémát működtetünk. Egyes területeken előbb, más területeken később indul meg a bizonyítási sémák természetes kiválogatódása. Az alacsonyabb szintű bizonyítási sémák azonban nem tűnnek el, hanem csak akkor használjuk, ha a kontextus azt indokolja.

Az egyén bizonyítási képességének fejlődése során - megint elsősorban a magasabb szintű komponenseket illetően - hipotézisünk szerint először a tekintélyelvű, majd az empirikus (induktív), végül az analitikus (deduktív) bizonyítások jelennek meg. Kutatási kérdés, hogy az egyes sémák megjelenése adott tartalmakon hány éves korban jellemző, és a fejlődésben mennyiben játszik szerepet a bizonyítási képesség alacsonyabb szintű komponenseinek változása, és mennyiben a kulturális környezet.

Az evolúciós megközelítés lehetőségét három egymásba ágyazott rendszerben vizsgáltuk. A rendszerek közötti kölcsönhatást illetően megfogalmaztuk, hogy a nagyobb rendszerek fejlődése, változása hatással van a bennfoglalt rendszer fejlődésére. A rendszerek kölcsönhatásai azonban ennél bonyolultabbak. Azt mondhatjuk, hogy az egyéni fejlődés evolúciós szempontú megközelítése is képes magyarázatot adni a kultúrtörténeti változásokra.

1.4. A bizonyítási képesség fejlesztése

Amikor fejlesztésről van szó, olyan vizekre evezünk, amelyet a pedagógia a legsajátabbnak érez. A fejlesztéssel kapcsolatban elsőként az a kérdés vetődhet föl, hogy mekkora a pedagógia mozgástere: Az adottságokhoz, az iskolán kívüli tényezők hatásához mit tud hozzátenni, vagy milyen mértékben tudja azok hatását tompítani?

A bizonyítási képesség fejlesztésének lehetőségeinek áttekintését a deduktív gondolkodás fejlesztésével kapcsolatos gondolatokkal kezdem. A stratégia-szint fejlesztésével kapcsolatban ezután először általában véve a meta-tudás, majd speciálisan a matematikai bizonyítási képesség fejlesztését vizsgáljuk.

A deduktív gondolkodás fejlesztésére hivatott kísérletek között sokfélét találunk. Az időtartamot tekintve egy-két órás laboratóriumi tréningektől a 10 hónapos iskolai kísérletekig széles a skála. A következőkben előkerülő három kísérlet közül az első a pragmatikus gondolkodási sémák elméletén alapul, a második Piaget elméletére épül, a harmadik neopiagetiánusnak tekinthető abban a vonatkozásban, hogy a teljes kétváltozós logikai műveletrendszer a fejlesztés kritériuma.

Cheng, Holyoak, Nisbett és *Oliver* (1986) a szintaktikus és pragmatikus fejlesztési módszerek összehasonlítása során megállapították, hogy egy komplett kurzus a kétváltozós logikáról hatástalannak tekinthető ahhoz képest, ha egy tréning során megengedéssel, kötelezettséggel kapcsolatban elemzünk „Ha..., akkor..." típusú állításokat. *Cheng, Holyoak, Nisbett* és *Oliver* hangsúlyozzák azért, hogy - bár a szintaktikus fejlesztési út nem hatékony - tarthatatlan az az álláspont is, mely szerint a logikus gondolkodás tartalom-specifikus. Lehetséges tehát a fejlesztés oly módon, hogy nem egyszerűen ismereteket, szabályokat akkumuláltatunk, de kerülendő az olyan fejlesztési elképzelés, amely a logika tanításától reméli a deduktív gondolkodás fejlődését.

Kuhn és *Angelev* (1976) egy négy hónapos tréning eredményeiről számolnak be, amely eredményesnek bizonyult: 10-11 éves gyermekek a Piaget-i inga-feladathoz hasonló struktúrájú problémákon dolgoztak, és a legtöbbjüknek sikerült „fél osztály"-t ugraniuk, vagyis a konkrét műveleti szintről az átmenetire, az átmenetiről a formálisra. Bár a kísérletet iskolásokkal végezték, ám a tananyagtól függetlenül, laboratóriumi körülmények között.

Éppen ezért különösen jelentős az a kísérlet amely *Csapó* és *Vidákovich* (1988; *Csapó*, 1991, 1992a) nevéhez fűződik. Az iskolai tananyag szerkezetének átstrukturálásán alapuló 10 hónapos fejlesztő kísérlet eredményei szerint a logikai műveleti képességek fejleszthetők, de hetedik osztályban már kevésbé, mint negyedikben. A fejlesztés alapelveiről írt tanulmányaikban *Vidákovich* (1987b) és *Csapó* (1987) hangsúlyozzák, hogy iskolai keretek között a fejlesztés az egyes tantárgyak anyagának átdolgozásával valósulhat meg. Nem érdemes olyan tantárgyban vagy kurzusban gondolkodnunk, amely kifejezetten és közvetlenül a logikus gondolkodásra tanítana. Így ugyanis nem a deduktív gondolkodást, hanem a metalogikai képességet fejlesztenénk.

1.4.1. A matematikai fejlesztő kísérletek modelljei és eredményei

A bizonyítási képesség és a matematika tantárgy kapcsolatrendszerében még sok a „fehér folt." Ha igaza van *Skemp*nek (1975), és a matematika valóban az a tantárgy, amelyben az általa intuitívnek és reflektívnek nevezett tudáselemek egymás természetes kiegészítői, akkor a bizonyítási képességet a reflektív szintű matematikatudáshoz sorolva nyilvánvaló a matematika fontos szerepe a bizonyítási képesség fejlődésében.

A bizonyítási képesség fejlesztésével kapcsolatban számos fejlesztési elképzelést fogalmaztak meg és próbáltak ki a matematika tanításának keretein belül. Több fejlesztési elképzelés egyúttal egy fejlődési modellnek tekinthető. Ezzel szemben viszont a legtöbb iskolai fejlesztési kísérlet egy adott fejlődési modell alapján törekszik a fejlődés gyorsítására. Nem tartjuk azonban elvileg hibásnak azt a megközelítésmódot sem, amely a fejlődést és a fejlesztést még a modellalkotás szintjén sem választja el, mivel ténylegesen sok szállal összefonódó jelenségekről van szó.

A matematikai bizonyítási képesség fejlesztése során több út is járhatónak tűnik. „A gyerek számára ... a matematika minden felépítése új, s az, hogy neki mi egyszerűbb vagy érthetőbb, nem nagyon mérhető azzal, hogy ...matematikai neveltetésünk optikájával nézve mit látunk egyszerűbbnek vagy érthetőbbnek." - olvasható a *Cser* (1972, 308. o.) által szerkesztett módszertani könyvben.

Kilpatrick (idézi *Edwards*, 1998) öt szintet különít el a tanulói bizonyítás-tanulás során. Szerinte először a kulcsszavakat és a bizonyítás ötletét kell memorizálni, és legvégül kialakul az a képesség, hogy a tanuló új szituációban is képes bizonyítást konstruálni. Ez az elképzelés a tradicionális oktatási helyzethez igazított elmélet. *Thurston* (1995) a régi elképzelések karikatúrájaként említi a DTP-modellt (definíció, tétel, bizonyítás szavak angol megfelelőiből alkotott mozaikszó). A mai modellek, amelyeket PTD-modelleknek nevezhetünk, fordított sorrendet tételeznek fel: először meg kell adni a lehetőséget a felfedezésre és absztrahálásra, és csak legvégül kell formális nyelvet használni a gondolatok közléséhez.

Az új felfogás esszenciáját jelenti a *Hodgson* és *Morandi* (1996) által leírt három fázis: felfedezés, magyarázat, formalizálás. A matematikatanítás és a tanárképzés számára ez azt jelenti, hogy a konvencionális tétel→bizonyítás→példák egymásutániság helyett példák→bizonyítás→tétel a helyes sorrend az oktatás folyamatában és a tankönyvekben is (*Almeida*, 1995).

Ha arra gondolunk, hogy a mai magyar iskolarendszerben a bizonyítások elsősorban az érettségire megtanulandó gondolatmeneteket jelentenek, külön is hangsúlyozni kell, hogy a bizonyítási tevékenység jelen van (jelen lehetne) többféle matematikai tevékenységben. Természetesen nem csupán a gépies „Ellenőrizd a megoldást!" fölszólításra gondolunk, hanem arra, hogy számtalan esetben a tanulók felfedezhetnék magukat a tételeket úgy, hogy a felfedezés során már csaknem korrekt bizonyítást is adnának rá. Érdemes fölidézni *Descartes* gondolatát, aki szerint a régi görögök sem úgy jutottak hozzá a tételek felfedezéséhez, ahogyan a bizonyításokat végső formába öntötték.

A képesség-jellegű tudásnál általánosságban elmondottakon túl azt állítjuk, hogy a bizonyítások a *NAT*-ban (ld. 70. o.) követelményként megfogalmazott *rugalmas, fegyelmezett* gondolkodásra nevelés kiváló eszközei. A „rugalmas" és „fegyelmezett" közötti látszólagos ellentmondás úgy oldható föl, hogy a rugalmas gondolkodás *Dreyfus* és *Eisenberg* (1996) szerint a nagy matematikai felfedezésekhez mindig nélkülözhetetlen volt. Ha valami nem megy az egyik módon, meg kell próbálni másképp. Fegyelmezett gondolkodás szükséges ugyanakkor a matematikai fogalmak megértéséhez és megtanulásához. *Moore* (1994) szerint a bizonyításokban előforduló hibák legnagyobbrészt a fogalmak hiányos ismeretére, meg nem értettségére vezethetők vissza.

Blum és *Kirsch* (1991) a szigorú (rigorous) bizonyítások szintjén belül elkülönítik egymástól a formális és a preformális bizonyításokat. Ez utóbbiak teljesen korrekt, deduktív, ám nem formalizált bizonyítások. Mivel sok tanuló számára a bizonyítások *rituális külsőségei* nehezítik a megértést, a preformális bizonyítások igen hasznosak a matematika több területén is.

Mariotti és *Maracci* (1999) szerint a nyitott kérdések bizonyítottan az érvelő tevékenység katalizátorai. A nyitott problémákra adott bizonyítások formai szempontból ugyan hasonlóak a hagyományos „bizonyítási feladatokhoz", de jelentős különbség, hogy nyitott problémák esetén a megoldási késztetés egy önmagunk számára adott feladatra született válasz. A nyitott probléma esetén a megoldáshoz vezető útról *Maher* és *Martino* (1996) egy esettanulmány kapcsán azt írja, hogy igen fontos megadni a problémák többféle reprezentálásának lehetőségét.

Hanna (1995) úgy véli, hogy az új felfogást követve a bizonyítások iskolai használata valójában *tekintélyelv-ellenes*. *Movshovitz-Hadar* (1988) szerint minden iskolai matematikai bizonyítás a tanulók számára a meglepetések forrása lehet. Szerinte nem hiba, ha egy tételt úgy fogalmazunk meg (akár kérdés formájában), hogy a bizonyítás meglepetést okozzon. (Például: „Mekkora lehet maximálisan egy háromszög belső szögeinek összege?") Hangsúlyozza (*Movshovitz-Hadar* és *Hadass*, 1990) a helytelen bizonyításokból származó látszólagos matematikai paradoxonok szerepét - legalábbis a felsőfokú matematika-oktatásban.

Pólya (1957) szerint a bizonyítások mnemotechnikai eszközt is jelentenek, azaz könnyebb az egyes fogalmak, ismeret-jellegű tudáselemek megtanulása, ha azok - valamely bizonyításon belül - egymáshoz kapcsolódnak. Hangsúlyozzuk, hogy nem a bizonyítások memoriterré degradálásáról van szó, hanem arról a többször megerősített kognitív pszichológiai tényről, hogy a memorizálás sikeressége nem egyszerűen az ingernek kitettség és a figyelem idejétől (ezért nem is az akarattól) függ, hanem sok más tényezőtől - közte a megjegyzendő dolgok asszociáltságától, szemantikai kapcsolataitól - is (ld. pl. *Parkin*, 1993).

A tankönyvekben szereplő bizonyítások kiválasztásakor érvényesül a tanításmódszertan szempontja: Nem azt bizonyítjuk, ami a szaktudomány szempontjából „theorema egregium"-nak minősül, hanem azt, aminek bizonyítása például a képességfejlesztés, a matematika esztétikumának bemutatása céljából fontos.

Eléggé bő azon matematikai tételek köre, amelyeket bizonyítás nélkül taníthatunk az iskolában, és a bizonyítás hiánya nem okoz problémát. A tanulók bizonyítás nélkül is elhisznek, elfogadnak és alkalmaznak tételeket. (Elég az algebra alaptételére vagy a párhuzamos szelők tételének irracionális esetére gondolni.) Sok esetben az állítás nyilvánvaló, a szemlélet, a tapasztalat alapján evidens. *Kline* (1967, idézi *Markel*, 1994) különösen óv attól, hogy a nyilvánvaló dolgokat olyan axiómákra támaszkodva bizonyítsuk, amelyek nem nyilvánvalóak („proves the obvious on the basis of what is not obvious").

Tekintettel arra, hogy az iskolai bizonyítás szerepe elsősorban a magyarázat, a matematikai fogalmak kapcsolatainak megvilágítása, esetenként szükségtelenné válik teljes, „precíz" bizonyítást adni. *Pólya* (1957) szerint „A nem teljes bizonyítások a maguk helyén ízléssel alkalmazva hasznosak lehetnek" (166. o.). Ezt a véleményt alátámasztja az is, hogy *Skovsmose* (1994) kutatása szerint sok tanuló úgy képzeli, hogy egy tételnek csak egy bizonyítása lehet. Aligha tévedünk nagyot, ha azt mondjuk, hogy ezt sok magyar tanuló is így gondolja: feltehetőleg a tekintélyelvű, deduktivista bizonyítások hatására.

A matematikával foglalkozók - talán kultúrtörténeti okokból is - elsősorban a geometriát tartják alkalmas terepnek a bizonyításokkal való ismerkedéshez. *Pólya* (1957) szerint: „Ha a diák nem ismerkedett meg némelyik speciális geometriai tétellel, nem mulasztott sokat; lehetséges, hogy ezekre a dolgokra később, az életben kevés szüksége lesz. De ha nem ismerkedett meg geometriai bizonyításokkal, akkor az igazi evidencia legjobb és legegyszerűbb példáit mulasztotta el, és elszalasztotta a legjobb lehetőséget arra, hogy megragadja a szigorú okoskodás lényegét. Ha a közoktatás céljai közé tartozik, hogy a diák elsajátítsa a szemléletes evidencia és a logikus gondolkodás lényegét, akkor ezt nem teheti meg a geometriai bizonyítások segítsége nélkül" (164-166. o.).

A geometria tanításával kapcsolatban szélsőséges vélemények fogalmazódtak meg az elmúlt évtizedekben: „Euclid must go!" - „Euclid may stay." (Euklidesznek mennie kell - Euklidesz maradhat). Magyarországon talán senki nem vitatja, hogy az iskolában euklideszi geometriát kell tanítani. Érdemi vitára alkalmasabbak az olyan kérdések, hogy meddig menjünk vissza az alapokig az axiomatizálásban, hogyan lehet az elemi geometriai bizonyításokat a tananyag szerves részévé tenni (elkerülve, hogy „ma tételeket bizonyítunk..."). Többen is féltik attól a geometriát, hogy a bizonyítások szolgálóleányává válik, és háttérbe szorul a térbeli gondolkodás, és más, a geometriával szintén asszociálható képességterületek (például a rajzkészség, a valós világ modellezése, esztétikai érzék) fejlesztése (*Hoffer*, 1981; *Sherard*, 1981).

Markel (1994) szerint a bizonyítások megismertetésére, gyakoroltatására igen alkalmas terep a számelmélet. Egyszerű paritásos, oszthatósági állítások segítségével a bizonyítások szerepe, struktúrája jól bemutatható. Ami ebben az esetben hiányzik, az a geometria axiomákra alapozott felépítése. Mivel azonban az axiomákra visszavezetés - különösen a szemlélet, a táblai rajz alapján nyilvánvaló tételeknél - sokszor szükségtelen lehet, a számelméletet, a maga implicit axiómáival, igen alkalmasnak tarthatjuk a bizonyítások gyakorlására. A geometria és a számelmélet mellett a trigonometria és diszkrét matematika tűnik a bizonyítások tanítása számára legalkalmasabb területnek (*Thompson*, 1991; *Thompson* és *Senk*, 1993).

A matematikai bizonyítási képesség fejlesztésére minden matematikai terület alkalmas. A tartalmi szempont mellett azonban vegyük figyelembe, hogy van egy oktatási stratégia, amely a bizonyítási képesség fejlesztésének hatékony segítője lehet: a számítógéppel segített oktatás. A tapasztalati szint bejárásának egy viszonylag gyors és korszerű útját jelenthetik a számítógépes oktatóprogramok. *Edwards* (1997) szerint a számítógép segítségével történő „terület-felderítés" során a tanuló - a matematikushoz hasonlóan - intuitív módon keres összefüggéseket, sejtéseket fogalmaz meg és teszteli azokat, így készítve elő a terepet a bizonyítások számára.

A témánkhoz kötődő egyik ismert szoftver a Cabri nevű geometriai program, amely az euklideszi sík megismeréséhez nyújt segítséget. *Mariotti* (1998) abból kiindulva, hogy a geometriai szerkesztések problémája jó talajt biztosít a bizonyítások tanulásához, a Cabri programot használta kutatásában. A tanulóknak a szoftver segítségével kellett szerkesztési feladatot megoldani, majd igazolniuk a szerkesztés helyességét. A kísérlet azt igazolta, hogy a tanév tartama alatt jelentős előrelépés mutatkozott a szerkesztések hátterét jelentő tételek megértésében, de az is nyilvánvalóvá vált, hogy a szerkesztés helyességének igazolása spontán módon nem alakul át formális matematikai bizonyítássá.

Láthattuk, hogy a matematikai bizonyítás fejlesztő kísérletei ma a PTD-modellek talaján állnak, ami azt jelenti, hogy mire egy matematikai állítást kimondunk, addigra azt a felfedezés és megértés folyamatában már lényegében bizonyítsuk is, a fogalmak pontosítása, a definíciók tisztázása csak a bizonyítási folyamat legvégén következzék. A jelenlegi tankönyvek még nem követik ezt a felosztást. Elképzelhető, hogy nem lenne hátrányos egy olyan kettősség, hogy az órán PTD, a tankönyvekben DTP szerint haladjunk. A DTP-felépítésű tankönyvekkel kapcsolatban *Konior* (1993) arra mutat rá, hogy a tankönyvi bizonyításokban szükség van a bizonyítás szerkezetét követő tagolásra. A tagolást biztosító eszközök lehetnek verbálisak (az úgynevezett delimitátorok, mint például „először megmutatjuk, hogy", „ezzel igazoltuk a ... formulát") és nem-verbálisak, amelyek jól kiegészíthetik a verbális tagolást keretek, vonalak, térközök használatával.

A matematikai bizonyítási képesség fejlesztésével kapcsolatban leírtak kiterjeszthetők az általános bizonyítási képesség fejlesztésére is. *Nagy József* (1996) szerint „a (tapasztalati) egyszerű bizonyító eljárások rendszeres használata az iskola valamennyi évfolyamán lehetséges, ami szilárdan megalapozhatja a bizonyítási képességet, a bizonyítás igényét" (61. o.). Pedagógiai szempontból az egyik (ha nem *a*) legfontosabb kérdés, hogy a tapasztalati szintű bizonyításokból hogyan alakítható ki a formalizált deduktív bizonyítások iránti igény. „A bizonyítási igény magától nem jön, ennek az igénynek a megjelenése nevelés eredménye" (*Sztoljár*, 1970, 209. o.). Mikor, ki és hogyan fogalmazza meg az iskolában a kérdést: De *miért* igaz ez?

Mivel a bizonyítási képesség működése nem korlátozható kizárólag a matematika tantárgyra, ezért a fejlesztés alapelvei más tantárgyak számára is érvényesek. Ami a matematikai bizonyításokkal kapcsolatban követelményként megfogalmazódik (pl. definíciók és tételek közötti különbségtétel képessége), minden olyan tantárgy minden olyan témakörére átvihető, ahol bizonyítások szerepelnek. Más tantárgyak ebből a szempontból annyiban különböznek a matematikától, hogy az axiómarendszer gyakran implicit módon, szubjektíven, egyénenkénti eltéréseket mutatva létezik. Maga a bizonyítási tevékenység azonban lényegében ugyanaz.

Kaiser (1993) néhány fizikai probléma kontrapozíciós és kontradikciós bizonyításával mutatja meg, hogyan válhat egymást kölcsönösen segítővé a matematikai és fizikai gondolkodás. A történelem tantárgy - talán sokak számára meglepő módon - szintén alkalmas terepe a bizonyítási képesség fejlesztésének. A „történelemben nincsen 'ha'" alapelv mindössze annyi korlátozást jelent, hogy direkt bizonyításokra kell szorítkozni. A *Bernáth*

(1978) által szerkesztett módszertani könyv szerint „A szövegfeldolgozást deduktív megközelítésű feladatok is szolgálhatják." A példaként említett feladat így szólt: „Bizonyítsuk be, hogy már az ősember is sikerrel védekezett természeti ellenfeleivel!" (415. o.) A feladat megoldása valóban bizonyítást jelent: nyilvánvalóvá tételt.

1.4.2. A bizonyítási képesség fejlesztése és a tanterv

Az előző részben vázolt fejlesztési alapelvek, amelyek a PTD-modellek elsőbbségét vallják, szükségessé teszik, hogy figyelmünket a bizonyítások tantervi szabályozására fordítsuk. A Nemzeti alaptanterv (1995) Matematika műveltségi területének általános fejlesztési követelményei között találjuk a következőket:

- Deduktív következtetések, néhány lépéses bizonyítások.
- Sejtések, szabályszerűségek megfogalmazása.
- A definíciók és tételek megkülönböztetése, feladatokban való alkalmazása. (NAT, 72. o.)

Ezek az általános fejlesztési követelmények a bizonyítási képesség fejlesztése révén teljesíthetők. A részletes követelményeket áttekintve érdekes változásra bukkanunk az 1978-as általános iskolai tantervhez képest. A Pitagorasz-tétel megfordítása akkor a 7. osztály anyagában és követelményei között szerepelt, a NAT alapján a „tétel és megfordítása" - a gondolkodási módszerek részterületen belül - a 10. évfolyam végének követelményei közé tartozik. A változás annak köszönhető, hogy a NAT készítése során sok száz tanár véleményét és tapasztalatát is figyelembe vették. Úgy gondoljuk, további kutatásokkal - a tanulók gondolkodásának még pontosabb megismerésével - hasonló problémák esetén empirikusan megalapozott válaszokat tudunk majd adni.

A tantervekben megjelenő bizonyítás-koncepciók a matematikatudomány álláspontjával együtt változhatnak. Ennek legjellemzőbb példája az 50-es, 60-as években kibontakozó „*Új Matematika*" mozgalom, amely a matematika pontosabb tükröződését kívánta elérni a formális logika és a precíz, formális bizonyítások hangsúlyozásával (*Hanna*, 1995). *Hanna* (1989) véleménye szerint az iskolai tárgyalásmódból adódik, hogy sokan úgy vélik, a teljes szigor a matematikai gyakorlat lényege. Az iskolában a matematikai eredmények - ugyanúgy, mint a matematikusok számára publikált eredmények - tételek és bizonyítások formájában jelennek meg.

Hoyles (1997) az angol nemzeti alaptanterv idevonatkozó részének bírálatában kiemeli, hogy „most már hivatalosan is igen nehezek a bizonyítások és csak a legrátermettebbek számára elérhetők" (9. o.). Véleménye alapján ha a tanterv a bizonyítási tevékenységet nemcsak késői évfolyamokra helyezi, hanem még ráadásul magas szintű gondolkodási formaként deklarálja, az hátrányosan befolyásolja a fejlesztést.

Az 1989-ben kiadott amerikai *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (Tantervi és értékelési standardok az iskolai matematika számára) a tekintélyelvű oktatási stílus ellenpontozásaként hangsúlyozza (ld. *Edwards*, 1997), hogy a matematikai gondolkodás nem korlátozódik a formális bizonyításokra, és a matematikai gondolkodás elsajátítása *minden* matematikát tanuló számára megfelelő cél.

Hoyles (1997), amikor csaknem 2500 tanuló véleményét kérdezte arról, hogy mit jelent számukra a matematikai bizonyítás. Az egyik tipikus válasz a következő volt: „Minden, amit a bizonyításról tudok, az az, hogy amikor felfedezed a választ, akkor kell valami bizonyíték, ami azt támogatja, és ez a bizonyítás. Bizonyítani kell, hogy egy egyenlet mindig működik." (11. o.) *Hoyles* szerint a tanulók válaszai a tantervi felépítést tükrözik vissza; csak a matematikai tevékenység egy típusa, a „vizsgálódás" (investigation) esetén szükséges a bizonyítás.

1.4.3. A fejlesztés személyi feltételei: tanárok és egyetemi hallgatók bizonyítási sémái

A bizonyítási képesség fejlesztését - mint láttuk - meghatározzák a fejlesztés bizonyítottan hatékony alapelvei, valamint a tantervi fölépítés is. A fejlesztés szempontjából hasonló fontosságú a tanárok és a leendő tanárok bizonyításokról alkotott felfogásának vizsgálata. Kutatásunkban mi is alkalmaztunk tanári kérdőívet. A tanári bizonyítási sémák fontosságának vizsgálatát alátámasztja, hogy *Zaslavsky* (1989) szerint a tanulók fogalmi tévképzetei visszavezethetők a tanárokéra.

Chazan (1993) a bizonyításokról alkotott felfogást egy geometriai oktató-szoftver (Geometric Supposer) használatán keresztül vizsgálta. A tanárok különösen nehéznek tartják az induktív, felfedeztető munka és a deduktív bizonyítások összekapcsolását, integrálását. *Chazan* szerint az empirikus, verifikáló érvelés és a deduktív bizonyítások egymás mellé helyezése okozhatja, hogy a tanulók mindkét érvelési forma értékét és fontosságát megkérdőjelezik. A vizsgálat eredményei szerint sok tanuló a nyilvánvalóvá tételt bizonyításnak tekinti, míg mások (ellenkezőleg) a deduktív bizonyításokat sem tartják elegendőnek a nyilvánvalóvá tételhez. Mindkét esetben megfigyelhető a szkepticizmus, miszerint a deduktív bizonyítások nem védenek a kivételek, az ellenpéldák ellen.

A leendő tanárok bizonyítással kapcsolatos koncepcióit kutatva *Martin* és *Harel* (1989) azt találta, hogy több, mint 50%-uk matematikailag korrektnek ismeri el az induktív bizonyításokat, és az elfogadottság mértéke nem függött a tartalom ismertségétől, barátságosságától. Véleményük szerint a bizonyításokról kialakult kép a matematikatanár által közvetített képnek felel meg. *Kárteszi* (1972, 59. o.) a jelenséget a „tanárról tanárra szálló hagyományok kritika nélküli átvétele" kifejezéssel illeti. *Martin* és *Harel* ezenkívül kiemelik a bizonyításokról kialakult kép „ritualisztikus" vonását, amely feltehetőleg a formalista tanításmód gyümölcse.

Almeida (1995) bizonyításokkal kapcsolatos állításokat ötfokozatú skálán (2=erősen egyetért, 1=egyetért, 0=nincs véleménye, -1=nem ért egyet, -2=erősen nem ért egyet) értékeltetett matematika szakos hallgatókkal. A kutató által feltételezett „ideális válaszhoz" képest helyenként igen nagy eltérések mutatkoztak. „A bizonyítások néha kétes érvényességű trükköket tartalmaznak" állításra például az ideális -2 érték helyett 0,1-es átlag jött ki.

1.5. A bizonyítások és a bizonyítási képesség értékelésének problémái

Az általában vett bizonyítási képesség értékelésekor abból az alapelvből indulunk ki, amely szerint az emberi gondolkodási képességek a megoldott kognitív feladatok nehézségével írhatók le. Ahhoz, hogy ez az alapelv érvényes lehessen, eleget kell tenni a tesztelméleti jóságmutatók által támasztott követelményeknek. Kutatásunk egyik fontos problémája a mérőeszközök jóságának elemzése; ebben a fejezetben általánosságban véve a magasabb rendű gondolkodási képességek (higher order thinking skills) mérésének reliabilitásáról és validitásáról ejtünk néhány szót. Ezt követően a kognitív feladatokon nyújtott teljesítményt - a tesztelméleti jóságmutatók teljesülése esetén is - befolyásoló tényezőről, a kontextus hatásáról lesz szó. Ezt követően áttekintünk néhány modellt és módszert, amelyet a bizonyítási képesség mérésére alkalmaztak. Végül a vizsgálatunkban szereplő mérőeszközök kialakításának szempontjait tekintjük át.

A pedagógiai értékelés elméletében és gyakorlatában az utóbbi évtizedben bekövetkezett változások azt jelzik, hogy előtérbe kerül a magasabb rendű kognitív képességek tesztelése, és az ehhez szükséges új tesztelési módszerek kialakítása. A pedagógiai tesztelés gyakorlatában ez azt jelenti, hogy folyamatosan háttérbe szorulnak az egyszerű választást kívánó (multiple-choice) itemek, és gyakrabban lesz szükség nyíltvégű (open-ended) feladatokra. Ezt a tendenciát meggyőzően mutatja ki az olvasási képesség nemzetközi vizsgálatainak példáján Lafontaine (2000). A tesztelméleti szempontból gyakran nehezebben kezelhető nyíltvégű feladatok a klasszikus tesztelméleti jóságmutatók újraértékelését hozzák magukkal (Dochy és Dierick, 2000). A reliabilitás esetében a változás azt jelenti, hogy az itemek konzisztenciájára épülő statisztikai eljárások helyet a szakértők véleményének egyezése (agreement among experts) lehet a megbízható értékelés záloga.

1.5.1. A megoldott kognitív feladat nehézségi szintje és a kontextus

Amikor azt az alapelvet követjük, hogy a tanuló által megoldott kognitív feladat nehézségi szintje megfelelő információt nyújt a tanuló tudásszintjéről, számos teljesítményt befolyásoló tényezőt nemcsak adottnak, hanem lényegében minden tanulóra egyformán érvényesnek tartunk. Bloom tanulási modelljéből kiindulva (ld. *Báthory*, 1992) azonban azt hangsúlyozzuk, hogy a kontextus nem csak a feladat megoldottságát, hanem részben az aktivizált előzetes kognitív tudást, és részben a feladattal kapcsolatos előzetes affektív magatartást meghatározza.

A matematikai bizonyítási képességgel kapcsolatban *Hoyles* (1997) mutatott rá a kontextus fontos szerepére. *Hoyles* (1997) szerint a matematikai bizonyítási képesség komponenseinek hierarchiája jórészt a kutatásmódszertan műterméke, mivel a szociális dimenzió figyelembe nem vétele azzal jár, hogy a kutató számára a matematika tanulása kontextusától elvonatkoztatott, hierarchikus keretbe helyezett tudás elsajátítását jelenti. A kutató - különösen ha elég nagy, reprezentatív a minta - nem tudhatja, hogy az egyes tanulók számára mit jelent a bizonyítás és hol tartanak a tananyagban. A tanuló ugyanakkor nem ismeri a kutató hierarchikus rendszerét, bár *Hoyles* (1997) kutatása bizonyítja: a tanulók tisztában vannak azzal, hogy a bizonyításoknak valamiféle - tekintélyelvű személy által elbírálható - formai követelményeknek meg kell felelniük.

Az előzetes affektív és kognitív jellegű tudás egyaránt szerepet játszik abban, hogy a tanuló a feladatmegoldás során milyen stratégia mellett dönt. *Bettman, Johnson* és *Payne* (1990) szerint ugyanakkor egy stratégia melletti döntés függ - többek között - a döntés jóságának igazolhatóságától (justifiability) és a stratégia alkalmazásához szükséges szellemi erőfeszítésektől is. Ez utóbbi tényező a költség/haszon elv megjelenését jelenti a gondolkodásban, és részben emiatt nem tudjuk, hogy a tesztelési helyzetben nyújtott teljesítmény milyen mértékben tekinthető a gondolkodási képesség indikátorának.

A kontextus fontosságát világítja meg a következő példa, amely az előfelmérés egyik tesztjében szerepelt.

> Egy képzeletbeli város lakói három csoportba tartoznak: vannak köztük igazmondók, akik mindig igazat mondanak, vannak hazugok, akik mindig hazudnak; és vannak felemások, akik felváltva mondanak igaz és hamis mondatokat. Egy éjszaka csöng a tűzoltóság telefonja, és a következő párbeszéd hangzik el:
>
> Tűzoltó: *Tessék, tűzoltóság.*
> Telefonáló: *Ég a városháza.*
> Tűzoltó: *Igazmondó vagy?*
> Telefonáló: *Felemás vagyok.*
>
> Ég-e a városháza? Válaszodat indokold!

Az egyik tanulói válasz így szólt: „Ég, mert különben nem telefonált volna." Egy másik tanuló a következő választ adta: „Lehet, hogy ég, de lehet, hogy nem, mert felemás telefonált."

Vajon melyik válasz az értékesebb; melyik esetben mondható fejlettebbnek a bizonyítási képesség? A második tanuló megpróbált logikai alapú választ adni, megpróbálta kitalálni, hogy mit akar a kérdező. Vajon lehet értékesebb az a válasz, amelyik nagyobb mértékben veszi figyelembe a kérdező szándékait? Az első tanuló ugyanakkor határozott választ adott a feltett kérdésre: a válasz alapján parancs adható a tűzoltóság indítására, még ha az felesleges is lenne. Vajon az a válasz az értékesebb, amelyik tiszta, egyértelmű döntést tartalmaz?

Arra következtethetünk az előzőekből, hogy különböző szempontokból, különböző kontextusban mást-mást jelenthet a bizonyítás „értéke". A matematikában az a jó bizonyítás, amely deduktív, és helytálló axiómákra, korábban bizonyított állításokra támaszkodik. Ha azonban bizonyítás alatt nyilvánvalóvá tételt értünk, akkor ez azzal jár, hogy elismerjük, mindig az adott szituációtól függ, hogy hány lépésre, milyen következtetési szabályok és milyen állítások felhasználására van szükség.

A klasszikus pszichometriai alapelvvel kapcsolatban, amely kimondta, hogy a képesség a megoldott kognitív feladat nehézségi szintjével jellemezhető, azt kell leszögeznünk, hogy a megoldott kognitív feladat nehézségi szintjét nagymértékben befolyásolhatja a kontextus. Elképzelhető egy olyan álláspont is, hogy per definitionem a megoldottsági szintben benne foglaltatnak a kontextuális hatások. Azonban ebben az esetben nem egy területáltalános gondolkodási képességet jellemez a feladat megoldottsága, hanem egy kontextusba ágyazott képesség jellegű tudáselemet.

A kontextus hatása nem küszöbölhető ki, és még kevésbé kvantifikálható. A mérések validitása érdekében a kontextuális hatások lehetőség szerinti tompítására kell törekedni.

1.5.2. A természetes logikai megközelítésmód

A deduktív gondolkodás kutatásának természetes logikai irányzata szerint (*Braine*, 1978, 1990; *Rips*, 1983, 1994; ld. még *Johnson-Laird* és *Byrne*, 1991) a pszichikumban működő következtetési szabályok leírhatók a klasszikus logika nyelvével. A „természetes logika" elméletei szerint nincs szó arról, hogy a pszichikumban hibátlanul működik valamely műveleti vagy következtetési szabályrendszer. Közös ezekben az elméletekben, hogy olyan következtetési szabályokkal foglalkoznak, amelyek logikailag érvényesek, és amelyekről - valamilyen szempont alapján - az feltételezhető, hogy minden ép ember pszichikumában működnek.

Braine (1978, 1990) evolúciós-történelmi perspektívából tekinti át, mintegy kizárásos alapon, hogy mely következtetési szabályokra nem volt szüksége őseinknek. *Rips* (1983, 1994) a már létező empirikus eredményeket felhasználva konstruál egy olyan rendszert, amely logikailag teljes, azaz minden fajta logikailag érvényes következtetés leírható a természetes logikai rendszer szabályaival. *Braine* és *Rips* rendszerében is kiemelkedő fontosságú a *modus ponens* szabály, míg a *modus tollens* mindkettőből hiányzik. Az előtag cáfolata és a következmény megerősítése szabályok sem szerepelnek egyik rendszerben sem, mivel ezek logikailag nem érvényes (ún. plauzíbilis) szabályok. Ezen a ponton támadhatók leginkább a természetes logikai elméletek: ragaszkodnak olyan - logikailag érvényes - szabályokhoz, amelyek az emberi pszichikum számára nem jelentenek 100%-ig biztos, deduktív szabályt, és ugyanakkor a hétköznapi gondolkodás igen gyakran használt plauzíbilis szabályait azon az alapon mellőzik, hogy azok nem a logika szabályait követik.

A természetes logikai rendszerek alapelvei közül azt tartjuk a további kutatások számára is követendő elvnek (s ezt már *Piaget* (1967/1997) is megfogalmazta), hogy „a logika a gondolkodás tükre s nem fordítva". A gondolkodó ember pszichikuma modellezhető logikai szabályokkal (függetlenül attól, hogy a gondolkodás ténylegesen milyen módon megy végbe), de erősen korlátozó szempont az, ha csak a valamely logikai rendszerben érvényes szabályokat veszzük figyelembe.

A bizonyítási képesség értékelésére a természetes logikai megközelítésmód felhasználásával *Rips* (1994) vállalkozott. Kísérletében egyszerű, néhány logikai következtetési séma egymás utáni alkalmazásával megoldható bizonyítások szerepeltek. A bizonyítások fölbonthatók voltak a természetes logikai rendszerben szereplő szabályok egymásutánjára. *Rips* számítógéppel modellezte, hogy amennyiben a könnyebb-nehezebb következtetési szabályok alkalmazásával történne a bizonyítás, milyen eredmény jönne ki. A szimulációval kapott és a kísérletek során tapasztalt eredmények nagymértékű egyezést mutattak.

A természetes logikai megközelítés használhatóságát a bizonyítási képesség értékelésére erősen korlátozza, hogy értelmezésünk szerint a bizonyítási stratégia kiválasztása nem a természetes logikai szabályok algoritmikus szintjén történik. Egy másik korlát: A *Rips* által használt feladatok néhány lépéses, „laboratóriumi" szinten formalizált feladatok. A természetes logikai megközelítésmód nem képes számot adni arról, hogy hétköznapi állítások igazságértékének megállapítása milyen lépésekben történik - például olyan állítások esetén, amelyekben nem szerepelnek a kijelentéslogika logikai kötőszavai.

1.5.3. Matematikai alapú értékelési rendszerek

A jelenlegi gyakorlat szerint (itt elsősorban az érettségire gondolunk) a tanulók matematikai bizonyításait úgy értékelik, hogy adva van a helyes bizonyításért kapható maximális pontszám, és a nem teljesen hibátlan bizonyításokra az összpontszám valamely törtrészét lehet adni; attól függően, hogy a tanár megítélése szerint mennyire jó a bizonyítás. Ez a módszer ugyanaz, mint amit a szöveges feladatok értékelésére alkalmaznak. Ott az a gyakori probléma, hogy a tanuló az elején „elszámol" valamit, és utána a rossz számadattal folytatja az egyébként helyes megoldást. Van, aki ilyenkor 0 pontot ad, van, aki többet. A bizonyítások esetében - tekintve, hogy többféle bizonyítás adható, amelyek ráadásul nem feltétlenül azonos fajtájúak - elvileg még nehezebb az értékelő dolga. Mit tegyünk az olyan bizonyítással, amelyikben a tanuló mindent leírt, amit az órai mintabizonyításban a tanár a táblára fölvitt, ám nem lehet tudni, hogy a tanuló mit tekint kiinduló feltételnek, mit és milyen lépésekben bizonyít?

Feltehetően hasonló problémák inspirálták az USA-ban egy ötfokozatú értékelési skála kidolgozását a tanulók által adott (geometriai) bizonyításokra (ld. *Senk*, 1985; *Thompson* és *Senk*, 1993):

0 - A tanuló nem ír semmit, leírja a feladatban megadott dolgokat, vagy érvénytelen és haszontalan dedukciókat ír.

1 - A tanuló legalább egy érvényes deduktív következtetést ír, indoklással.

2 - A tanuló bizonyságot tesz arról, hogy képes következtetések láncolatát használni, vagy úgy, hogy a körül-belül a bizonyítás feléig eljut és megáll, vagy úgy, hogy következtetések sorozatát írja le, amely azonban az első lépésekben elkövetett hiba miatt nem érvényes.

3 - A tanuló olyan bizonyítást ír, amely logikailag helyes minden lépésében, de hibák fordulnak elő a jelölésben, a megszövegezésben vagy a tételek nevében.

4 - A tanuló jó bizonyítást ír, legfeljebb egy jelölésbeli hibával.

A módszer számos előnye azonnal nyilvánvaló, és megoldást kínál több vázolt problémára. Véleményünk szerint a NAT-követelmények teljesítését is ezzel a megközelítésmóddal lehet könnyebben értékelni. A hagyományos pontozás mellett hogyan fejezhető ki a különbség azon tanulók között, akik tudnak avagy nem tudnak különbséget tenni definíciók és tételek között?

Komoly hátrányt jelent, hogy a bizonyítások a tapasztalatok szerint nem egyforma nehezek, így furcsa lenne, ha mindig 4 pont lenne a maximum. Egy reprezentatív mintás mérés segíthetne abban, hogy az egyes bizonyítandó tételekhez nehézségi indexeket rendeljünk, és azzal szorozva korrigáljuk a feladatok közötti különbségekből adódó anomáliákat.

Ha elsőbbséget kapna is egy olyan értékelési rendszer, amelyben a bizonyítás típusa, szerkezete fontosabb, mint a bizonyítás közben bevezetett jelölések korrektsége, az ismeret jellegű bizonyítási részek ismerete, újabb problémát jelent egy megfelelő matematikai bizonyítási tipológia létrehozása.

A matematikai bizonyítások csoportosítása meglehetősen nehéz. Ismertek különböző, klasszikusnak tekinthető bizonyításfajták. *Wilder* (1944) - hangsúlyozva, hogy csak vázlatos áttekintésre vállalkozik - a következő típusokat említi: 1) matematikai (teljes) indukció, 2) példa, ellenpélda adása, 3) reductio ad absurdum, 4) konstruktív módszerek, 5) nem mindenki által elfogadott alapelvek, axiómák (kiválasztási axióma, kontinuum-hipotézis, transzfinit indukció).

Céljainknak egy olyan csoportosítás felelne meg, amely a bizonyítási folyamatban szerepet játszó gondolkodási képességek alapján csoportosítaná a bizonyításokat. Azért nehéz ilyen felosztást készíteni, mert a tanulók gondolkodását csak közvetett eszközökkel vizsgálhatjuk, és a feladatok megoldása során született eredményeket nemcsak a feladat és a feladatmegoldás kontextusa határozza meg, hanem az elméleti keret, amelybe helyezve az eredményeket interpretáljuk. Ez utóbbi tényező kapcsán térünk ki most röviden a következtetési szabályok felőli megközelítés lehetőségére, majd ismertetjük *Harel* és *Sowder* (1998) rendszerét, amely speciálisan a matematikai bizonyításokat kategorizálja, és hierarchiát állít föl az egyes típusokra vonatkozóan.

Következtetési szabályok felőli megközelítés

A bizonyításokat csoportosíthatjuk aszerint, hogy a bizonyítás során a pszichikum milyen következtetési szabályokat „használ". Ez a megközelítésmód természetesen nem lehet független attól, hogy milyen kognitív feladatokkal vizsgáltuk a pszichikum működését.

A matematikai bizonyításfogalom egyetlen következtetési szabályra, a *modus ponens*re[3] épül. A matematikai bizonyítások során használt más szabályok ugyanis visszavezethetők a modus ponensre. Ez a következtetési szabály az egyik legalapvetőbb, és bizonyíthatóan már egészen kicsi gyermekek is használják a következtetéses gondolkodásukban (ld. *Braine*, 1990).

Vannak olyan logikailag érvényes következtetési szabályok, amelyek a modus ponensre épülnek, és deduktív bizonyításokban fordulnak elő.

A nem-deduktív bizonyításokat (a következtetési szabályok felőli megközelítést követve) úgy lehet felismerni, hogy azokban nem-deduktív szabályokat alkalmazunk. *Hársing* (1981) felosztása szerint erős plauzíbilis, gyenge plauzíbilis, induktív és valószínűségi következtetésekről beszélhetünk az induktív bizonyításokban. Az erős plauzíbilis következtetések (pl. a *redukció*[4] /következmény megerősítése/ szabály) determinisztikus igazságában csak kevesen kételkednek (ld. *Evans*, 1982).

---

[3] „Ha p, akkor q" és „p" állításokból „q"-ra következtethetünk.

[4] „Ha p, akkor q" és „q" állítások alátámasztják „p" igaz voltát.

A matematikában és más területeken létező bizonyítások tipizálására azért nem alkalmas a következtetési szabályok felőli megközelítésmód, mert a bizonyítási tevékenység folyamata és annak végterméke gyakran nem állítható egymással párhuzamba. Ahogyan azt korábban megfogalmaztuk, a kísérleti személy 100%-osan biztosnak érezheti a következtetést plauzíbilis szabály esetén is, ugyanakkor sokan vélik azt, hogy a deduktív szabályok nem védenek a kivételek ellen.

Bizonyítássémák Harel és Sowder (1998) szerint

Harel és *Sowder* (1998) a PUPA (Proof, Understanding, Production, and Appreciation) Project keretében másod-, harmad- és negyedéves hallgatók bizonyítási sémáit vizsgálta változatos módszerekkel: többek között interjúk, egyéni és csoportos házi feladatok, tesztek felhasználásával. Az így megszülető hierarchikus rendszernek egy egyszerűsített változatát tekintjük most át. (A bizonyítási sémák teljes rendszerét lásd a Mellékletben.)

I. Az externális, valamilyen külső forrásra, és nem az állítások közötti összefüggésekre alapozott bizonyítás-sémák. Ide tartozik a tekintélyelvű személyre hivatkozás, a rituális formakövetés és az értelem nélküli szimbólum-manipuláció.

II. Az empirikus bizonyítás-sémák közé a perceptuális (például geometriai ábrázolás alapján történő) és a konkrét példákon alapuló induktív bizonyítások tartoznak.

III. A matematika által kizárólagosan elismert bizonyítások (az analitikus bizonyítássémák) közé tartoznak a transzformációs és az axiomatikus sémák. A transzformációs bizonyítások már deduktív bizonyítások, amelyek során a célnak éppen megfelelő gondolkodási műveleteket használunk. (A „nyilvánvalóvá tenni valamit" alapelvünk[5] tehát ezekben úgy valósul meg, hogy nem vétünk a matematikai bizonyítások szabályai ellen.) *Harel* és *Sowder* szerint a transzformációs bizonyítások fontos előzményt jelentenek az axiomatikus bizonyítási sémák elsajátításához.

Nem-hierarchikus bizonyítás-kategorizálás lehetősége

Vannak olyan bizonyításfajták, amelyek valamilyen szempontból külön figyelmet érdemelnek. Ilyenek például az ellenpélda adásával születő és az indirekt bizonyítások. Ezeket a bizonyításfajtákat nehéz rendszerbe sorolni, mi most mégis erre teszünk kísérletet.

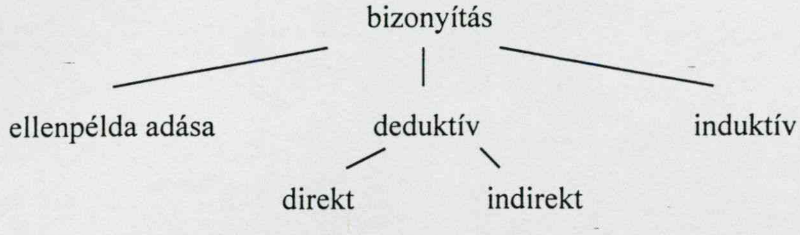
A bizonyításfajták közül az „ellenpélda adása" azzal különíthető el a többitől, hogy legtöbbször kérdező típusú, hamis állítást tartalmazó feladathoz kapcsolódik. Igen nehéz feladat lenne kísérleti eszközökkel vizsgálni, hogy az ellenpélda adása során hogyan működik együtt a kontextus által is befolyásolt stratégia-szint és az algoritmikus szint komponensei.

Az induktív-deduktív dichotómia a bizonyításfajták elkülönítésében annyit jelenthet, hogy a bizonyítás tartalmaz-e plauzíbilis, induktív vagy valószínűségi következtetést, avagy nem. Az induktív bizonyításokat a matematikában hibás bizonyításnak tartjuk. Bár sok módszertani javaslat szól amellett, hogy az oktatás során járjuk be az induktív utat, keressünk analógiákat (ld. *Pólya* 1988, *Saul* 1992), alighanem szigorúnak kell lennünk annak megítélésében, hogy magában a matematikai bizonyításban elfogadhatók-e induktív lépések.

A deduktív bizonyításokat direkt és indirekt bizonyításokra osztjuk. Indirektnek azt a bizonyítást nevezzük, amelyben - a bizonyítás legalább egy pontján - egy következtetés feltételeként szerepel a bizonyítandó állítás tagadása.

[5] A bizonyításoknak ez a definíciója *Urbán Jánost* idézve *Lakatos Imre* nevéhez köthető (ld. *Lakatos*, 1981, 227-228. o.)

Az egyéb gyakran említett bizonyításfajták (verifikáció, falszifikáció, levezetés, teljes indukciós stb.) vagy fölöslegesen szaporítaná az osztályozás szempontjait (verifikáció-falszifikáció dichotómia), vagy valamelyik eddig említett bizonyításfajta alesetének tekinthetők; például a teljes indukciós bizonyítás a deduktív direkt bizonyítások közé sorolható. A bizonyításfajtákat a 3. ábrán összegezzük:



3. ábra. Bizonyításfajták egy nem-hierarchikus rendszere

Hangsúlyozzuk, hogy ez a kategorizálás - a bizonyítási képesség szempontjából - nem tartalmaz hierarchiát. Úgy véljük, az ember a saját maga által alkotott bizonyítások között sem képes rangsort felállítani. Döntéseink meghozatalánál gyakran induktív gondolatmenetekre támaszkodunk, a „kivétel erősíti a szabályt" hétköznapi alapelv pedig esetenként az „ellenpélda adása" bizonyításfajta értékét teszi kérdésessé. Érdemes megemlíteni, hogy deduktív bizonyítás is lehet matematikai értelemben hibás, például körben forgó okoskodás esetén.

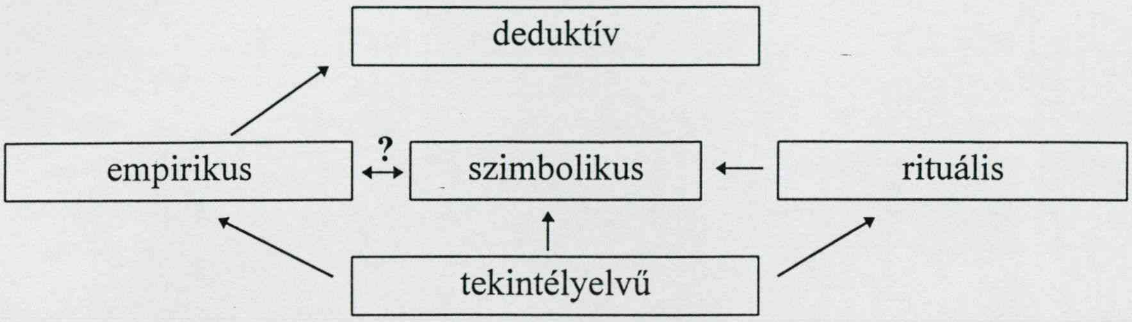
Az indirekt bizonyítások

A bizonyításfajták között kitüntetett szerepe van az indirekt bizonyításoknak; legalább három okból: 1) *Markel* (1994) szerint a felsőbb matematikai bizonyítások 75%-a indirekt, 2) ebből adódóan különös jelentősége van az arisztotelészi logika elfogadásának. Egyes matematikusok szerint (intuitív matematika) az állítás tagadásának cáfolata nem egyenértékű az állítás igazolásával. 3) az előzőekből következően kiemelt fontosságú feladat, hogy a tanulók elsajátítsák az indirekt bizonyítás technikáját; képesek legyenek feltételként használni egy állítás tagadását abban az esetben is, ha valójában az adott állítás igazolása a cél. *Szász* (1972) szerint az indirekt bizonyítást olyan példán keresztül kell a tanulók elé tárni, amikor nem tűnik eleve lehetetlennek a bizonyítandó állítás tagadása sem (pl. $\sqrt{2}$ irracionalitása). Az indirekt bizonyításokkal kapcsolatos nehézségek a pedagógiai-pszichológiai kutatók előtt is régtől ismertek. *Williams* (1979, idézi *Thompson*, 1996) vizsgálata alapján a 11. évfolyamos tanulók 60%-a nem képes hipotézisként olyan állítást fölhasználni, amelyet hamisnak vél. *Williams* (1979, idézi, *Thompson*, 1996) szerint az indirekt bizonyítások használatának szükséges feltétele a körben forgó okoskodás elkerülése. *Thompson* (1996) szerint az indirekt bizonyításokhoz a bizonyítások természetének és jelentésének általános megértése mellett szükséges, hogy a tanuló képes legyen állítások tagadásának megfogalmazására. Ambrus (1993) eredményei szerint a matematika tagozatos középiskolások számára is komoly nehézségeket jelent egzisztenciális és univerzális kvantorokat tartalmazó állítások esetén az állítás tagadásának megfogalmazása.

1.5.4. Egy fejlődési bizonyításkategorizálási modell

A bizonyítási képesség értékelése szempontjából egy olyan modellre van szükség, amely 1) a kognitív feladatra adott válaszok típusai alapján jellemzi a bizonyítási képességet és

2) a választípusok, amelyek alapján az értékelés történik, a bizonyítási képesség fejlődésével összhangban vannak. Ennek a kettős célnak igyekszik megfelelni a 4. ábrán látható modell, amely Harel és Sowder (1998) említett matematikai bizonyítástípusaira épül, azonban igyekszik a bizonyítástípusok hierarchiáját a fejlődési dimenzió mentén újraértékelni.



4. ábra. Egy fejlődési bizonyítás-kategorizálási modell

Az eredeti modellben a hierarchia csúcsán a deduktív bizonyítások álltak, mivel matematikai szempontból azok a legértékesebbek. A bizonyítási képesség szempontjából szintén ezeket tesszük az első helyre, mert a fejlődés legkésőbbi stádiumára jellemzők.

Matematikai szempontból az empirikus bizonyítások állnak a második helyen, mert ezek nyilvánvalóan értékesebbek, mint a fennmaradó három típus, amiket összefoglalóan externális bizonyításoknak neveznek. Fejlődési szempontból ugyanakkor nehéz különbséget tenni az empirikus, szimbolikus és rituális bizonyítások között. Sok esetben azt tapasztaltuk, hogy a tanulók és a tanárok többre értékelnek egy szimbolikus bizonyítást egy empirikusnál, mivel a szimbolikus (és a rituális) bizonyítások a fejlődés egy viszonylag késői szakaszára jellemzőek.

Az externális bizonyítások alfáját a tekintélyelvű bizonyítások jelentik. Mind a fejlődési modellben, mind matematikai szempontból ezek helyezkednek el a hierarchia alján. A modellben szereplő nyilak iránya azt jelzi, hogy a bizonyítástípusok a fejlődés során hogyan alakulhatnak át egymásba. Az empirikus és szimbolikus bizonyítások közötti kétirányú nyíl és a hozzá tartozó kérdőjel arra utalnak, hogy a fejlődés útja bizonytalan, de befolyásolható. Az nyilvánvaló, hogy a szimbolikus bizonyítások csak az empíria talajára visszatérve alakíthatók át deduktív bizonyítássá, ám arra is több jel utal, hogy az empirikus bizonyításokból gyakran válik szimbolikus bizonyítás a vélt vagy valós tanári elvárások miatt. Az ábrán szereplő kérdőjel tekinthető felkiáltójelnek is: A pedagógiának itt kell közbeavatkoznia, és az értékelési rendszerben értékesebbnek minősíteni a példákkal alátámasztást, mint az értelem nélküli szimbólum-manipulációt.

2. A vizsgálat hipotézisei, módszerei és eszközei

Kutatási hipotéziseink rendszerét hat pontban foglalhatjuk össze:

1) Az elméleti alapok áttekintésével kapcsolatos alaphipotézisünk, hogy *a filozófia, a matematika és a jogtudomány bizonyítás-fogalmából kiindulva megalkotható egy pedagógiai-pszichológiai bizonyítás-fogalom,* amely az állítások igazságértékével kapcsolatos kognitív folyamatok modelljének alapjául szolgálhat. Már a kutatás elején fontos volt leszögeznünk, hogy a bizonyítási képességgel kapcsolatban nem a matematikai bizonyítások terén szerzett jártasságot kívánjuk vizsgálni.

2) *A pedagógiai-pszichológiai bizonyítás-fogalomra és a kognitív képességek kutatásával kapcsolatos eredményekre épül a bizonyítási képesség mint többszintű hierarchikus képesség-rendszer modellje.* A bizonyítási képességen belül két fontos al-komponensrendszert különböztetünk meg: bizonyítások értékelésének és bizonyítások konstruálásának képességét.

3) *A pedagógiai-pszichológiai bizonyítás-fogalomra és a bizonyítási képesség modelljére építve kidolgozhatók azok az értékelési módszerek, amelyek lehetővé teszik a bizonyítási képesség komponenseinek értékelését.* A bizonyítási képességrendszer különböző szintű komponenseit más-más módszerekkel lehet vizsgálni. A hardver-szint fejlettségének mérése pszichológiai laboratóriumi feladat. Az algoritmikus szint mérése nagyjából a deduktív gondolkodás kutatás-módszertani kultúrájának felhasználását jelenti. A stratégia-szint vizsgálata jelentheti a szűkebb értelemben vett bizonyítási képesség mérését. Modellünk értelmében azonban az algoritmikus és stratégia-szint közötti kölcsönös információ-áramlás lehetetlenné teszi, hogy egyiket vagy másikat elkülönülten tanulmányozzuk. Ez a megjegyzés egyben a deduktív gondolkodás kutatásmódszertanának kritikája is, amit például Moshman is megfogalmazott. Utalhatunk itt még a pszichometria kapcsán emlegetett „pozitív sokszorozódás" (positive manifold) jelenségére (ld. *Anderson*, 1998; *Carroll*, 1998), amely szerint látszólag egymástól távol eső kognitív területhez tartozó feladatok megoldottsága szoros korrelációt mutat egymással.

4) *A bizonyítási képesség fejlődése evolúciós hasonlattal írható le.* Az egy időben különböző tartalmakon működő bizonyítási sémáink közül egyesek megerősítést nyernek, és így más tartalmakon is egyre gyakrabban kerülnek felhasználásra, míg más sémáink fokozatosan háttérbe szorulnak.

5) *A bizonyítási képesség fejlődését meghatározza a képesség-rendszer különböző szintű elemeinek fejlődése.* A fejlődés értelmezésével kapcsolatosan különösen fontos a deduktív gondolkodás kutatásában sokszor előkerült 12 éves kor körüli fejlődési küszöb.

6) *A bizonyítási képesség fejlődését és a fejlesztés lehetőségeit nagymértékben meghatározza az egyes bizonyítási sémák értékéről a tanulók felé áramló információ.* Evolúciós szemléletű modellünkkel összhangban azt állítjuk, hogy a fejlődés nagyrészt belső szelekció eredménye, amelyre nagy hatással van az iskola értékrendszere.

2.1. Az előfelmérés módszerei és eszközei

A nagymintás méréseket megelőzően a mérőeszközök kipróbálása és fejlesztése érdekében szükséges, hogy egy előzetes felmérést végezzünk. Ezt a nagymintás mérést megelőző vizsgálatot a kutatásmódszertan 'pilot study'-nak nevezi. A 'pilot study' kifejezés használata nem egyöntetű. *Lietz* és *Keeves* (1997) szerint a nagymintás mérést megelőzi az előtesztelés, amikor még a mérőeszközök kialakítása, fejlesztése folyik, és a pilot study, amikor a mérőeszközök már végleges formájukban rendelkezésre állnak, és a cél az adatrögzítési és -feldolgozási módszerek tökéletesítése. *Barrett* (1995) ugyanakkor a 'pilot work' kifejezést használja minden olyan munkafázisra, amely a nagymintás mérést megelőzi.

Ideális esetben tehát egy nagymintás keresztmetszeti pedagógiai vizsgálat három fázisból áll: 1) előtesztelés, amikor a mérőeszközök kifejlesztése a cél, 2) pilot study, amikor az adatrögzítési és -feldolgozási módszerek kialakítása történik, és 3) maga a nagymintás mérés. A továbbiakban az első két fázist együttesen előfelmérésnek nevezzük, utalva ezzel arra, hogy esetünkben időben nem különült el egymástól a mérőeszközök és az adatfeldolgozási módszerek fejlesztése.

A mérőeszközök kifejlesztésének folyamatában a deduktív gondolkodás kutatásának alapelvei és sokszínűsége követendő példát jelentettek. A sokszínűséget csak kis mértékben korlátozza, hogy a deduktív gondolkodás vizsgálata elsősorban a nyelvi-logikai képességek vizsgálatát jelenti. Bár a képi és manipulatív szintű vizsgálat is elvileg lehetséges, megtehetjük, hogy definíció szerint a logikai képességet a nyelvi kifejezésekre korlátozzuk. Ugyanakkor a verbális szint is nagy módszertani változatosságot tesz lehetővé. *Scholnick* és *Wing* (1991, 1992, 1995) a szóbeli kikérdezés és a megfigyelés módszereit alkalmazta a nyelvi-logikai képesség kutatásában. Az írásbeli módszer is igen elterjedt, mivel így nagyobb mintán végezhető mérés. A JATE Pedagógiai Tanszékének kutatói ezt a módszert használták (például *Csapó*, *Csirikné* és *Vidákovich*, 1987, *Vidákovich*, 1990). Érdekes megoldással találkozunk *Sinnott* (1975) vizsgálatában: kísérleti személyeinek azt az utasítást adta, hogy otthon, egyedül dolgozzanak, és két héten belül küldjék vissza a tesztet.

A szóbeli megfigyeléseknél, különösen, ha éppen a spontán beszéd logikai kötőszavait vizsgáljuk, valahogyan el kell terelni a figyelmet a feladat-jellegről. Az iskolában kiosztott logikai teszteknél ezzel ellentétben éppen az a célunk, hogy a tanulók érezzék a feladat-jelleget. Ez utóbbi probléma már nem kizárólag a gondolkodási képességek kutatásával kapcsolatos kihívás, hanem sok esetben a külső szakértő által készített tesztek iskolai használatával szemben megnyilvánuló ellenérzés következménye.

2.1.1. A minta és a mérőeszközök rendszere

Az előfelmérés 1998 májusában történt a „Matematikai alapképességek fejlődése" projekt keretében. A felmérésben három megye (Csongrád, Bács-Kiskun és Somogy) tanulói vettek részt. A minta országos szinten nem tekinthető reprezentatívnak: a felmérésben 2572 tanuló vett részt, akik többféle településtípus több iskolatípusát képviselik. A mérésben több mérőeszköz felvétele történt meg, mintegy két hetes időintervallumon belül, ami azt jelenti, hogy a mérési eredmények ugyanazon időpontból származóként kezelhetők. A mérőeszközök elrendezését a különböző évfolyamokon a 2. táblázat mutatja.

Amint a táblázatból kiderül, a felmérésben 5., 7., 9. és 11. osztályos tanulók vettek részt. Az általános képességtesztek minden évfolyamon, a tantárgy-specifikus tesztek csak 7. és 9. osztályban kerültek felvételre, mert ezeken az évfolyamokon jellemző, hogy a legtöbb tanuló mindét tárgyat tanulja. A kreativitás-teszt kivételével a mérőeszközök ehhez a méréshez lettek kifejlesztve. A 9. és 11. évfolyamos tanulók köréből csak gimnazisták és szakközépiskolások szerepeltek a mintában.

2. táblázat. A „Matematikai alapképességek fejlődése" vizsgálat mérőeszközeinek elrendezése

Mérőeszköz	Osztály			
	5.	7.	9.	11.
Adatlap	✓	✓	✓	✓
Matematika és fizika tanulmányi éntudat kérdőív		✓	✓	✓
Kreativitás teszt	✓	✓	✓	✓
Matematikai problémamegoldás teszt	✓	✓	✓	✓
Bizonyítási képesség teszt	✓	✓	✓	✓
Matematikai szöveges feladatok teszt			✓	✓
Matematikai tantárgyi tudásszintmérő teszt		✓	✓	
Fizikai tantárgyi tudásszintmérő teszt		✓	✓	

Az előfelméréshez kapcsolódóan matematikatanári kérdőíveket küldtünk a felmérésben résztvevő iskolákba. A vizsgálatba bekapcsolódó iskolák mintegy harmadából érkeztek vissza az iskola matematikatanárai által kitöltött kérdőívek. A visszaérkezett 56 mérőeszköz közül 32-t általános iskolai, 24-et középiskolai matematikatanárok töltöttek ki.

A kérdőívben (ld. Melléklet) néhány feladat jellegzetes tanulói válaszait közöltük, és arra kértük a tanárokat, hogy ötfokozatú skálán értékeljék azokat. Az értékelendő opciók kiválasztásánál elsődleges szempontunk volt a tapasztalt tanulói válaszok gyakorisága, de helyet kapott néhány ritkábban előforduló, ám elméleti szempontból érdekes válaszminta is. A kérdőíven öt feladat és a hozzájuk tartozó válaszlehetőségek szerepeltek.

Az előfelmérés részeként közvetlenül a nagymintás mérés-tesztjeinek bemérése előtt egy kisebb felmérésre került sor. 1999. május 10-én 15 tanuló részvételével a Szatymazi Általános Iskolában a nagymintás mérésben szereplő „Bizonyítási feladatok" tesztje került bemérésre, amely a végleges változattól abban a lényeges pontban különbözött, hogy a tanulóknak azt is meg kellett jelölniük, szerintük a matematikatanáruk hányas osztályzatot adna az egyes bizonyításokra. Amint majd az eredmények ismertetése során megmutatjuk, ez a kismintás mérés lehetővé tette a mérőeszköz egyszerűsítését.

2.1.2. A bizonyítási képesség tesztjeinek feladatai

A bizonyítási képesség tesztfeladatainak kiválasztásánál több szempontot is mérlegelni kellett:

• Tekintettel arra, hogy előmérésről volt szó, elsősorban nyíltvégű kérdéseket igyekeztünk megfogalmazni, hogy megadjuk az esélyt minél többféle gondolkodási stratégiát mutató válasz megjelenésére.

• Hídfeladatokat képeztünk az egyes évfolyamok között a fejlődés alapvető tendenciáinak vázolása céljából.

• A hídfeladat szerepét az iskolai tudáshoz, ismeretekhez szorosan kötődő tantárgy-specifikus feladatok nem tudják betölteni.

• Lehetőség szerint rövidíteni kellett a feladatok szövegét, hogy a szövegmegértési képesség és a kontextuális tényezők szerepét csökkentsük.

• A kontextuális tényezők szerepének vizsgálata érdekében kétféle feladat-megadási formát alkalmaztunk: kérdezést és felszólítást.

• A tesztben a deduktív gondolkodás kutatásának módszertanából ismert feladatokat is szerepeltettünk egyes plauzíbilis és determinisztikus logikai következtetési szabályok értelmezésének vizsgálatára.

Az itt felsorolt szempontok és a 45 perces időkorlát figyelembevételével mind a négy évfolyam számára egy-egy hat feladatból álló tesztet szerkesztettünk (ld. Melléklet). A matematikai bizonyításokkal kapcsolatban esetlegesen meglévő negatív beállítódások kiküszöbölésére a bizonyítási képesség tesztjének a „Gondolkodtató feladatok" nevet adtuk.

A négy évfolyam számára így összesen négy teszt készült. Ugyanazt a tesztet oldották meg az 5. és a 7. osztályosok („A" és „B" változatok készültek), és szintén közös volt a 9. és a 11. évfolyamosok tesztje, ugyancsak „A" és „B" változatokkal. A négyféle teszt feladatainak rendszerét, a hídfeladatok elrendezését a 2. táblázat szemlélteti. A táblázatban a feladatok „fantázianevei" szerepelnek, a részletesebb ismertetés a következő bekezdések feladata.

3. táblázat. A feladatrendszer struktúrája az előfelmérés „Gondolkodtató feladatok" tesztjében

(feladat sorszáma)	5., 7. osztály „A"	5., 7. osztály „B"	9., 11. osztály „A"	9., 11. osztály „B"
1.	7045/3 nem egész	6332/3 nem egész	2 az egyetlen páros prímszám	három páratlan szám szorzata páratlan
2.	tűzoltó	tűzoltó	tűzoltó	tűzoltó
3.	gömbölyű Föld	detektív	gömbölyű Föld	detektív
4.	a mai fiatalok hallása	zsiráfnyak	a mai fiatalok hallása	zsiráfnyak
5.	Laci erős AC és MT	Kinga okos MP és MT	Laci erős AC és MT	Kinga okos MP és MT
6.	AC és DA I.	AC és DA II.	AC és DA I.	AC és DA II.

A következőkben bemutatjuk a az előfelmérés során szerepelt feladatokat.

„Hogyan lehet bebizonyítani, hogy ha a 7045-öt elosztjuk 3-mal, akkor nem egész számot kapunk?"

és

„Hogyan lehet bebizonyítani, hogy ha 6332-t elosztjuk 3-mal, akkor nem egész számot kapunk"

A kérdés tekinthető a matematika tantárgyhoz tartozónak is, de a tanórai kérdésfeltevéshez képest szokatlan lehet a feladat megfogalmazása. A megfogalmazás segíti annak a célnak elérését, hogy többféle bizonyítási stratégia felszínre kerülhessen. Elképzelhető olyan válasz, hogy „Osztással", ami nyelvtanilag helyes ugyan, de matematikai szempontból kevésbé értékes, és elképzelhető, hogy valaki korrektül elvégzi az osztást, de egyetlen szóval sem jelzi, hogy hogyan is bizonyított.

Egy képzeletbeli város lakói három csoportba tartoznak: vannak köztük igazmondók, akik mindig igazat mondanak; vannak hazugok, akik mindig hazudnak; és vannak felemások, akik felváltva mondanak igaz és hamis mondatokat. Egy éjszaka csöng a tűzoltóság telefonja, és a következő párbeszéd hangzik el: *Tűzoltó: Tessék, tűzoltóság.* *Telefonáló: Ég a városháza.* *Tűzoltó: Igazmondó vagy?* *Telefonáló: Felemás vagyok.* *Ég-e a városháza? Válaszodat indokold!*

A feladat egy ismert logikai fejtörő alapján készült. A forrást *Pólos* és *Ruzsa* (1987) könyve jelentette, amelyben ugyanez a feladat egy nepáli falu lakóira és a pagodára volt megfogalmazva. Amiatt, hogy sok tanuló talán nem ismeri Nepált vagy a pagoda szót, ismerősebb szavakkal helyettesítettük azokat.

Ez a feladat volt az abszolút hídfeladat: mind a négy tesztváltozatban helyet kapott. Utólagosan beigazolódott az a sejtés, hogy ez a feladat kimeríthetetlenül bőséges tárháza a különböző bizonyítási stratégiáknak. A feladatot nehezítette, hogy nem csupán egy állítás igazolása volt a cél, hanem meg kellett találni azt az állítást is, amelynek az igazságát a tanuló indokolta.

A feladat logikai szempontból helyes megoldása az, hogy nem ég a városháza, mert

1) igazmondó nem telefonálhatott, mert akkor megmondta volna, hogy igazmondó,

2) ha hazug telefonált, akkor mindig hazudik,

3) ha felemás telefonált, akkor a második mondatában igazat mondott, tehát előtte hazudnia kellett.

A logikai szempontú megoldás mellett sokféle tekintélyelvű és empirikus bizonyítás is adható; ezekre részletesebben az eredmények ismertetésénél térek ki.

Az emberek nagyon sokáig nem tudták, hogy a Föld, amelyen élünk, gömb alakú. Hogyan tudnánk bebizonyítani, hogy a Föld gömb alakú, egy olyan embernek, aki ezt nem hiszi el?

Egy olyan kérésről van itt szó, amellyel iskolai pályafutása során többször is találkozhat a tanuló, akár környezetismeret, akár történelem, akár földrajz vagy fizika órán. A feladat megfogalmazása olyan, hogy rögtön döntéshelyzetet teremt. Az állítás igazságának megmutatását ugyanis olyan kontextusba helyezi, hogy vannak emberek, akik ezt még nem tudják. A tanulók többsége - a válaszok alapján - ignorálta ezt a kitételt, és csak magával a bizonyítandó állítással foglalkozott. Bár azt is tanítják az iskolában, hogy a Föld nem tökéletesen gömb alakú, a többség nem óhajtotta ezzel a kitétellel nehezíteni önmaga számára a feladatot. Az állítás, amit ebben a feladatban bizonyítani kellett, ismét alkalmasnak tűnt a három fő bizonyítási típus (tekintélyelvű, empirikus, deduktív) elemzésére. Ugyanakkor az is nyilvánvaló e feladat kapcsán, hogy az empirikus és deduktív bizonyítások közötti határvonalat sokszor igen nehéz csupán a kognitív feladatra adott megoldás alapján meghúzni.

A detektív maga elé rakta a nyomozás eredményeit tartalmazó feljegyzéseit. A következő mondatok voltak a papíron:

Ha a tettes ott járt az étteremben, akkor kifizette a számlát.
A gyanúsított nem fizette ki a számlát.

Mire következtetett ebből a két mondatból a detektív?

Ez a feladat ismét lehetőséget ad sokféle bizonyítási stratégia megjelenésének. A feladat megfogalmazása (kérdés, az indoklásra vonatkozó fölszólítás nélkül) jelzi, hogy ebben a feladatban elsősorban a bizonyítási képesség algoritmikus szintű komponenseit vizsgáltuk. Az egyik lehetséges jó megoldás azt a következtetést levonni, hogy amennyiben a gyanúsított a tettes, akkor nem járt ott az étteremben. Várható volt, hogy többen a megoldás gerincét a tapasztalatból merítik, mások pedig a kontextussal foglalkoznak abból a szempontból, hogy a detektív miért éppen két ilyen állításhoz jutott a nyomozás során.

Két ember beszélgetéséből való az alábbi részlet:

- Szerinted a mai fiatalok miért hallgatják olyan hangosan a magnót?
- Azért, mert a mai fiataloknak sokkal rosszabb a hallásuk, mint a régieknek.
- És vajon miért rosszabb a mai fiatalok hallása?
- Hát mert olyan hangosan hallgatják a magnót!

Mi a véleményed az elhangzott válaszokról?

és

Olvasd el figyelmesen a következő szöveget!

Egy állatkerti séta alkalmából Feri azt kérdezte a nagyapjától:
- Miért van olyan hosszú nyaka a zsiráfnak?
- Hogy könnyen elérje a legmagasabb fák lombját is - hangzott a válasz.
- És miért olyan magasak azok a fák?
- Hogy a zsiráfnak ne kelljen lehajolnia, ha enni akar - mondta a nagyapa.

Mi a véleményed a nagyapa válaszairól?

A két feladat szerkezetileg izomorf. A zsiráfnyak-történetet egy gyermek-viccújságban találtam. A párbeszédben a humor forrása egyrészt a körben forgó okoskodás, másrészt, hogy a második állítás kevésbé hihető, mint az első. A két izomorf feladat között az egyik jelentős különbség, hogy a fiatalok hallásáról szóló párbeszédben mindkét állítás önmagában hihetőnek tűnik. A logikai szempont mellett további jelentős különbség, hogy a kamaszkorban lévő feladatmegoldókban milyen indulatokat kavarnak az állítások. A logikai szempontból elvárt helyes megoldás mindkét feladat esetében a körben forgó okoskodás explicit felismerése. Ez történhet tudományosabb nyelven („az első állítás következményével indokol a másodikban") vagy kevésbé formális nyelven („ez olyan, mint a tyúk-tojás probléma"). Világosan látható, hogy ebben a feladatban sem nyújt közvetlen információt a gondolkodási képességek fejlettségéről a tanuló által adott megoldás; a kontextuális hatások mellett a meta-szintű komponensek működése is befolyásolja a válaszokat.

Azt szeretnénk megmutatni, hogy Laci erős. Olvasd el, mit mondott Anna és Balázs!

Anna: „Aki erős, az a nehéz zsákokat is fel tudja emelni. Laci fel tudja emelni a nehéz zsákokat, tehát Laci erős."
Balázs: „Aki nem erős, az nem tudja felemelni a nehéz zsákokat. Laci fel tudja emelni a nehéz zsákokat, tehát Laci erős."

Szerinted a két vélemény közül melyik alkalmas annak bizonyítására, hogy Laci erős? Tégy X jelet a megfelelő négyzetbe!

	hibátlan	*nem hibátlan, de nem is teljesen rossz*	*teljesen rossz*
Anna bizonyítása	□	□	□
Balázs bizonyítása	□	□	□

Ez a feladat a deduktív gondolkodás kutatás-módszertani kultúrájából ismert. Az első következtetési séma a következmény megerősítése (affirmation of consequent) szabály. Logikai szempontból ez nem helyes szabály, ám a hétköznapi kommunikációban nem szokott félreértést okozni, ha valaki elfogadja a következtetést. A logikai indetermináltság felismeréséhez gyakran logikai stúdiumokra van szükség, avagy egyes témakörök esetén az ellenpélda keresése segíthet. A feladatot külön bonyolítja, hogy három válaszlehetőség van, tehát megvan a lehetőség kibújni a döntési kényszer alól azzal, hogy a középső négyzetbe teszünk X-et.

A második séma a logikai szempontból helyes modus tollens szabály. A modus tollens-szel a kutatások szerint (*Evans*, 1982) gondok vannak, mert a levont következtetés jóságát nagy mértékben befolyásolja, hogy valamelyik tagmondatban szerepel-e tagadószó. A kombinatorikailag lehetséges négyféle tagadószó-jelenlét közül az eddigi vizsgálatok szerint a fenti eset (Ha nem ...,akkor nem ...) a második legnehezebb séma.

Mindkét sémában közös, hogy a következtetés levonását befolyásolhatja a tapasztalat. Ha például valaki nem fogadja el a kiinduló állítást, akkor ezen az empirikus alapon a következményt sem fogja determináltnak tekinteni. A feladat két iteme összefügg egymással abból a szempontból, hogy sok tanuló bizonytalan, lehet-e mindkét tétel esetén ugyanabba az oszlopba tenni a jelet. Az is nyilvánvaló azonban, hogy ha erre a körülményre a feladat instrukciójában felhívjuk a figyelmet, az rendkívüli mértékben torzíthatja az eredményeket.

Azt szeretnénk megmutatni, hogy Kinga okos. Olvasd el, mit mondott Anna és Balázs!

Anna: „Aki fejben ki tudja számolni, hogy mennyi 15-ször 25, az okos. Kinga fejben ki tudja számolni, hogy mennyi 15-ször 25, tehát Kinga okos."
Balázs: „Aki nem okos, az nem tudja fejben kiszámolni, hogy mennyi 15-ször 25. Kinga fejben ki tudja számolni, hogy mennyi 15-ször 25, tehát Kinga okos."

Szerinted a két vélemény közül melyik alkalmas annak bizonyítására, hogy Kinga okos? Tégy X jelet a megfelelő négyzetbe!

	hibátlan	*nem hibátlan, de nem is teljesen rossz*	*teljesen rossz*
Anna bizonyítása	□	□	□
Balázs bizonyítása	□	□	□

Ez a feladat sokban rokon a párhuzamos teszt hasonló feladatával. Itt azonban két determinisztikus logikai szabály, a modus ponens és a modus tollens került elő. Korábbi elemzésekből tudjuk (pl. *Csíkos*, 1996), hogy a modus ponens csaknem mindenki által fölismert determinisztikus logikai szabály. A modus ponens és a modus tollens egymás mellé helyezésével az volt a cél, hogy összevethessük a két szabály esetében nyert eredményeket.

Ebben a feladatban egyszerű, hétköznapi eseményekről lesz szó. Olvasd el figyelmesen a mondatokat, majd döntsd el, hogy szerinted mennyire helyes a következtetésünk! Karikázd be azt az egy betűt, amelyikhez tartozó válasz a legpontosabban kifejezi a véleményedet!

- *Tudjuk, hogy ha Kovács tanár úr eljön velünk az osztálykirándulásra, akkor hegyet fogunk mászni. Biztosan tudjuk azt is, hogy hegyet fogunk mászni. Igaz-e, hogy Kovács tanár úr eljön velünk az osztálykirándulásra?*

a) biztos, hogy nem igaz
b) valószínű, hogy nem igaz
c) egyforma valószínűséggel lehet igaz is, meg nem igaz is
d) valószínű, hogy igaz
e) biztos, hogy igaz

- *Tudjuk, hogy ha Évi kettesre áll matekból, akkor egész délután otthon tanul. Biztosan tudjuk azt is, hogy Évi nem áll kettesre matekból. Igaz-e, hogy nem egész délután tanul otthon?*

a) biztos, hogy nem igaz
b) valószínű, hogy nem igaz
c) egyforma valószínűséggel lehet igaz is, meg nem igaz is
d) valószínű, hogy igaz
e) biztos, hogy igaz

és

. *Ebben a feladatban egyszerű, hétköznapi eseményekről lesz szó. Olvasd el figyelmesen a mondatokat, majd döntsd el, hogy szerinted mennyire helyes a következtetésünk! **Karikázd be azt az egy betűt**, amelyikhez tartozó válasz a legpontosabban kifejezi a véleményedet!*

- *Tudjuk, hogy ha Peti megkapja a zsebpénzét, akkor este moziba megy. Biztosan tudjuk azt is, hogy este moziba megy. Igaz-e, hogy megkapja zsebpénzét?*

a) biztos, hogy nem igaz
b) valószínű, hogy nem igaz
c) egyforma valószínűséggel lehet igaz is, meg nem igaz is
d) valószínű, hogy igaz
e) biztos, hogy igaz

- *Tudjuk, hogy ha fúj a szél, akkor megrendezik a vitorlásversenyt. Biztosan tudjuk azt is, hogy nem fúj a szél. Igaz-e, hogy nem rendezik meg a vitorlásversenyt?*

a) biztos, hogy nem igaz
b) valószínű, hogy nem igaz
c) egyforma valószínűséggel lehet igaz is, meg nem igaz is
d) valószínű, hogy igaz
e) biztos, hogy igaz

Ezekben a feladatokban két egyszerű plauzíbilis szabály, a már említett következmény megerősítése és a feltétel tagadása (denial of antecedent) került terítékre. Az ötfokú Likert-skála alkalmazásával az volt a célom, hogy egymással is összehasonlítható módon kvantifikáljam a két szabály esetén az indetermináltság mértékét. Korábbi eredmények szerint (ld. *Bennett Lau*, idézi *Falmagne*, 1990; *Csíkos*, 1996; *Evans*, 1982) a két plauzíbilis szabály indetermináltságának megítélése szorosan összefügg egymással.

Bizonyítsd be, hogy a 2 az egyetlen páros prímszám!

A 9. és 11. évfolyamosok tesztjében szerepelt ez a feladat. Egy olyan állításról van szó, amelyet talán be is bizonyítanak órán, és mindenképpen fontos a számelméleti feladatok megoldásához. Teljesen egyetértek *Markel*lel (1994) abban, hogy a számelmélet kiváló terep a bizonyítások gyakoroltatásához. Kutatásunk szempontjából előny, hogy a számelmélet szélesebb terepet enged a deduktív bizonyítást adni nem tudni tanulók empirikus és szimbolikus bizonyításainak. Ebben a feladatban a matematikai szempontból legegyszerűbb bizonyítás, hogy megmutatjuk, a 2 prímszám, és mivel az összes többi pozitív számnak osztója, ezért az egyetlen páros prímszám.

Bizonyítsd be, hogy három páratlan szám szorzata páratlan szám!

Az előzőhöz hasonlóan ez is egy számelméleti feladat. Nehezíti a feladatot, hogy éppen páratlan sok páratlan szám szorzatát említi a szöveg. Nyilvánvaló, hogy a deduktív bizonyítást adni nem tudó tanuló számára itt is adott a lehetőség, hogy a hierarchikus bizonyításkategorizálásban alacsonyabb szinten lévő bizonyítást adjon: például empirikus vagy szimbolikus, esetleg rituális bizonyítást.

2.2. A nagymintás felmérés módszerei és eszközei

2.2.1. A minta leírása és a mérőeszközök rendszere

Az előfelmérés adatainak feldolgozását követően lehetőség nyílt olyan tesztek szerkesztésére, amelyek feleletválasztós feladatokat tartalmaznak, és a klasszikus tesztelméleti mutatók segítségével alkalmasak egy képesség jellegű tudásrendszer vizsgálatára. Két új teszt készült a bizonyítási képesség mérésére, amelyek - az előfelméréshez hasonlóan - egy nagyobb felmérésbe ágyazva kerültek a tanulók elé.

Az 1944 tanuló részvételével 1999 májusában lezajlott nagymintás felmérés „A gondolkodás fejlődése" nevet kapta. A felmérésben résztvevők teljes létszáma ennél valamivel magasabb volt: az adatrögzítés hibái miatt az elemzésekből kihagyott tanulók aránya 4-5‰. A „nagymintás" jelző a vizsgálat nevében nem elsősorban a résztvevők nagy létszámára utal, mivel az előfelmérés is több ezer fős mintán zajlott, hanem arra, hogy a minél több féle válaszlehetőség megjelenését célul kitűző előfelméréssel szemben a minta nagysága itt elsősorban a statisztikai elemzések szignifikanciáját befolyásoló tényező volt.

A felmérésben öt magyarországi megye vett részt, megyénként és évfolyamonként 2-3 osztállyal. Az előfelméréshez hasonlóan itt is a 10-17 éves korosztály tudása volt a kutatás tárgya. A 9. és 11. évfolyamokon nagyjából egyforma létszámban gimnáziumi és szakközépiskolai tanulók vettek részt a felmérésben. A felvett mérőeszközöket és a vizsgált évfolyamokat a 4. táblázat jelzi.

4. táblázat. A nagymintás mérés mintáinak és mérőeszközeinek elrendezése

Mérőeszköz	5.	7.	9.		11.	
			gimn.	szki.	gimn.	szki.
Adatlap	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Motivációs kérdőív	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Bizonyítási feladatok		✓	✓	✓	✓	✓
Gondolkodtató feladatok	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Természettudományi gondolkodás	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Matematika	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Fizika		✓	✓	✓	✓	✓
Kémia		✓	✓	✓	✓	

Az előfelméréshez hasonlóan a tanulói mérőeszközöket tanári kérdőív egészítette ki. A „Bizonyítási feladatok" és „Gondolkodtató feladatok" teszteket a tanári kérdőívvel együtt a Melléklet tartalmazza.

A „Bizonyítási feladatok" és a „Gondolkodtató feladatok" tesztjei valamennyi évfolyamon egységesek voltak. A matematikai bizonyításokat tartalmazó „Bizonyítási feladatok" teszt nem került bemérésre ötödik osztályban, mivel az első egyszerű matematikai bizonyítások, amikor a tanulók explicite találkoznak a bizonyítás szóval, általában hetedik osztályban jelennek meg. Ettől eltekintve elképzelhető, hogy a teszt reliabilitása megfelelő lett volna ötödik osztályban is, azonban a szaktanárok valószínűleg ellenezték volna azt, ha ötödik osztályban matematikai bizonyításokkal foglalkozunk.

Mindkét bizonyítási teszt egy változatban készült. A természettudományos gondolkodás tesztjével karöltve két egymás utáni tanórán oldották meg a tanulók mindkét tesztet, az osztály egyik fele először az egyiket, másik fele a másikat, majd fordítva.

2.2.2. A bizonyítási képesség tesztjeinek feladatai

A bizonyítási képesség két tesztje elsősorban tartalmi szempontból különbözött egymástól. A „Bizonyítási feladatok" teszt matematikai állításokat és azokra adott bizonyításokat tartalmazott, a „Gondolkodtató feladatok" teszt nem-matematikai állításokat és bizonyításokat, a deduktív gondolkodás jellemzésére hivatott feladatokat, valamint néhány nyíltvégű bizonyítási feladatot tartalmazott. A „Bizonyítási feladatok"-hoz egy matematikai bizonyításokkal kapcsolatos kérdőív is tartozott, amelyet *Almeida* (1995) tanulmányából adaptáltunk.

A „Bizonyítási feladatok" teszt

A „Bizonyítási feladatok" teszt matematikai állításokat és ezek különféle bizonyításait tartalmazta. A tanuló feladata az volt, hogy ötfokú skálán értékelje (szó szerint: „osztályozza") a bizonyításokat. A válaszlehetőségek konstruálása során ötféle bizonyítást látszott célszerűnek megfogalmazni. Ezt részben az indokolta, hogy az egyes bizonyítások értékelése során a tanulók ne kényszerüljenek arra, hogy egy osztályzatot több esetben is kiosszanak. Másrészről az ötféle bizonyítástípust a *Harel* és *Sowder* (1998) modelljére épülő fejlődési bizonyításkategorizálási modellünk alapján határoztuk meg. Ahogyan a modell részletesebb elemzése alapján megállapítható (ld. Melléklet), egyes bizonyítástípusok még a matematikán belül is tartalomhoz kötöttek: például egyes empirikus bizonyításformák jobbára a geometriában fordulnak elő. Öt olyan bizonyítástípust találtunk a modellben, amelyeket a fejlődési bizonyításkategorizálási modellben is szerepeltettünk, és amelyek lényegében minden tartalom esetén előfordulhatnak. Az öt bizonyítástípus, amely a „Bizonyítási feladatok" és a „Gondolkodtató feladatok" tesztben egyaránt szerepeltek: tekintélyelvű, rituális, szimbolikus, empirikus és deduktív.

Az egyes állításokhoz tartozó öt opció kijelölésével kapcsolatban felvetődik az objektivitás és a validitás problémája is. Jelen esetben a teszt jóságának ez a két dimenziója egymással is összefügg. Az objektivitást érintő probléma, hogy a tesztszerkesztő mennyire ragaszkodjon az előfelmérés során ténylegesen kapott válaszmintázatokhoz - mint ahogy tette azt az előfelmérés tanári kérdőívének összeállításakor - , ha olyan bizonyítástípusba tartozó választ kell konstruálnia, amilyen bizonyítástípussal az előfelmérés során nem találkozott. A dilemma feloldása úgy történt, hogy ahol csak lehetett, az előfelmérésből származó valós válaszmintázat szerepelt. Ahol viszont nem volt ilyen, ott a válasz megszerkesztése során a mondat nyelvezetében figyelembe vettük, hogy egy tizenéves hogyan fogalmazná meg a bizonyítást az adott témakörben.
Az 1. feladatban szereplő állítás a következő volt:

A 2 az egyetlen páros prímszám.

Az előfelmérés bizonyította, hogy a tanulók nyíltvégű kérdésfeltevés esetén is igen változatos bizonyítási stratégiákat alkalmaznak, ezért a feladatban szereplő öt válaszlehetőség megszerkesztése során nagymértékben támaszkodhattunk a korábban ténylegesen előforduló tanulói válaszokra.

Az 1. feladat *tekintélyelvű bizonyítása*

4. bizonyítás: Ez valóban igaz. A 2 az egyetlen páros prímszám. A múlt órán tanultuk ezt a tételt, és a feladatok megoldásakor sokszor fölhasználható. Ez egy valóban fontos matematikai bizonyítás.

A tekintélyelvű bizonyítások jellemző jegyeit (az állítás megismétlése megerősítéssel, a tanári tekintély említése, a tétel fontosságának említése) mind felsorakoztattuk ebben a bizonyításban, részben azért is, hogy terjedelmileg ne legyen feltűnően rövidebb a többi opciónál.

Az 1. feladat *rituális bizonyítása*:

5. bizonyítás: Tegyük fel, hogy van másik prímszám is, amelyik páros. Ez nem lehet, mert a prímszámok nem lehetnek páros számok, mert az kizáró ok. A prímszámokra éppen az jellemző, hogy nem páros számok, hanem páratlan számok. Van olyan páratlan, amelyik prím, de ott sem mindegyik. A páros számok között a 2 az egyedüli, amelyik prím lehet, de csak azért, mert olyan kicsi szám.

A rituális bizonyításokra jellemző, hogy a tanuló tudja, a bizonyításnak valamiféle formai követelményeket kell kielégítenie, de nem tartalmaz a bizonyítás érdemi előrelépést az állítás igazságának megmutatása felé. Megfigyelhető az opcióban a rituális bizonyítások egy másik jellemző eleme, az önellentmondáshoz vezető szószaporítás.

Az 1. feladat *szimbolikus bizonyítása*:

1. bizonyítás: Legyen x a legkisebb páros prímszám. Ha $x=2$, akkor állításunkat bizonyítottuk. Ha $x\neq2$, akkor az nem lehetséges, mert x-nél kisebb prímszám nincs. x-nél nagyobb sem lehet, mert az már nem lenne a legkisebb.

A szimbolikus bizonyításokra a matematikai jelek értelemtől megfosztott használata jellemző. Viszonylag gyakori jelenség, hogy a tanulók minden alap nélkül bevezetnek egy jelölést, például x-et, és annak használatához való görcsös ragaszkodásuk hibát okoz a gondolatmenetben. A konkrét esetben egy bizonyítatlan előfeltevésre épül az x jelölés bevezetése, majd a bizonyítás lényegében rituálisan folytatódik.

Az 1. állítás *empirikus bizonyítása*:

2. bizonyítás:

A 2 tényleg prímszám, mert csak 1-gyel és önmagával osztható. Érdekes dolog, hogy nincs másik prímszám, amelyik páros. De az is igaz, hogy nincs másik páros szám, amelyik prím, csak a 2.

Az empirikus bizonyítás egyik jellemzője lehet, hogy az állítást részben igazolja. Ez történt ebben az esetben is. Az „érdekes dolog" mondatkezdést egy következő vizsgálatban feltétlenül módosítanám, mert a tanulók szemében minden bizonnyal rontja a bizonyítás értékét a familiáris nyelvezet. Ahogyan *Balacheff* (1988), *Harel* és *Sowder* (1998) is rámutatnak, többféle empirikus bizonyítás van. Igazán szembeötlő különbség az empirikus és deduktív bizonyítások között akkor fedezhető fel, ha a bizonyítandó állítás univerzális kvantort tartalmaz (pl. „bármely...", „minden...", „tetszőleges..."). *Tirosh* (1999) megmutatta, hogy másod- és harmadéves matematika szakos hallgatók számára az univerzális kvantort tartalmazó állítások jelentik a matematikai tételek paradigmatikus modelljét, vagyis azt a típusú tételt, ami szerintük legjellemzőbben matematikai. Érdekes kérdés, hogy vajon az empirikus és deduktív bizonyítások megítélése jelentősen különbözik-e univerzális állítások esetén, mint más típusúaknál.

Az 1. állítás *deduktív bizonyítása*:

3. bizonyítás:

A 2 tényleg prímszám, mert csak 1-gyel és önmagával osztható. A páros számok között nincs másik prím, mert a többi páros szám mind osztható 2-vel is, és akkor már nemcsak 1-gyel és önmagával osztható, hanem legalább még egy számmal.

Az állításra adott deduktív bizonyítás jól szemlélteti, hogy gyakran nincs szükség matematikai szimbólumok használatára ahhoz, hogy korrekt bizonyítást adjunk.

A „Bizonyítási feladatok" tesztben az egyes feladatokhoz kapcsolódóan még további két kérdést tettünk föl. Az első kérdés arra irányult, hogy vajon a tanulók az állítás nyilvánvalósága és a bizonyítás szükségessége között milyen kapcsolatot tételeznek fel. Hipotézisünk szerint minél triviálisabb egy állítás, annál kevésbé van szükség bizonyításra a tanulók álláspontja szerint. A szóbeli interjúk során kiderült, hogy a kérdést többen másképp értelmezték, mint a tesztszerkesztő, így a kapott eredmények interpretálásában körültekintően kell majd eljárnunk.

Az állítás, amit a tanulók bizonyítottak,	*a) mindenki számára nyilvánvaló* *b) néhány tanulónak nem nyilvánvaló* *c) sokak számára nem nyilvánvaló*	*, ezért*	*a) feltétlenül bizonyítani kellett.* *b) hasznos volt, hogy bizonyítottuk.* *c) nem volt szükség bizonyításra.*

Formális tesztszerkesztési hibának minősíthető, hogy a kérdéssel kapcsolatban nem szerepelt semmiféle utasítás.

A második extra kérdés az egyes állításokkal kapcsolatban a következő volt:

*Ha nem láttad volna az ötféle bizonyítást, és neked kellett volna bizonyítást adnod az állításra, akkor a válaszod melyik bizonyításra hasonlítana leginkább?*________________

Hipotézisünk az volt, hogy ide - kevés kivételtől eltekintve - a tanulók annak az állításnak a sorszámát írják, amelyet korábban a legmagasabbra értékeltek. Az eredmények megbeszélése fejezetben foglalkozunk majd annak elemzésével, hogy milyen következtetések vonhatók le abban az esetben, ha ez a hipotézis igaznak bizonyul.

A tesztben szereplő másik három feladat opcióit teljes részletességgel a Melléklet tartalmazza. A következőkben az állításokkal és egyes opciókkal kapcsolatban néhány érdekességet emelünk ki. A második állítás az egyik legklasszikusabb iskolai geometriai tétel volt:

A háromszög belső szögeinek összege 180^0.

A *Tirosh* (1999) által használt fogalom szerint ez egy valódi paradigmatikus tétel. Ilyen állítások esetén várható az, hogy az empirikus és deduktív bizonyítások között éles határvonal nyilvánuljon meg. Az opciók kiválasztásánál dilemmát jelentett, hogy az empirikus bizonyítás *balacheff*-i (1988) értelemben a *naiv empirizmus* vagy a *döntő kísérlet* kategóriába tartozzék. Végül a *döntő kísérlet* mellett szólt, hogy az állítás univerzális volt.

A harmadik állítás az előfelmérésben is szerepelt:

Három páratlan szám szorzata mindig páratlan.

Ebben az esetben a szimbolikus bizonyítási opció szerkesztése jelentette a legnagyobb kihívást. Az előfelmérés során sok esetben előfordult, hogy a tanuló jelölések bevezetésével, tisztán formálisan próbált bizonyítani. Több esetben csupán az volt a gond, hogy nem írta le, mit jelentenek a bevezetett jelölések, ám a matematikához értők számára világos volt, hogy lényegében rendben van a formális bizonyítás. Ezért itt egy olyan opciót kerestünk, amelyben komoly koncepcionális probléma adódik abból, ha valaki nem ismeri föl az értelem nélküli szimbólum-manipulációt.

> *3. bizonyítás:*
>
> Legyen a három tetszőleges páratlan szám x+1, y+1 és z+1. Ekkor a szorzatuk:
>
> (x+1)(y+1)(z+1)=(xy+x+y+1)(z+1)=
> xyz+xy+xz+x+yz+y+z+1=xyz+xy+xz+yz+x+y+z+1
>
> A szám 1-re végződik, ezért biztosan páratlan.

Itt a kulcsmomentum annak felismerése, hogy ha egy összeg utolsó tagja 1, akkor az nem jelenti szükségszerűen azt, hogy maga az összeg 1-re végződik. Ugyanakkor feltehetően növeli a bizonyítás értékét, hogy jól kivitelezett részmegoldás található benne. Az empirikus bizonyítás itt a *balacheff*-i naiv empirizmus szintjét képviseli.

A 4. feladatban ismét egy univerzális állítást fogalmaztunk meg. Ez az állítás nem-univerzális formában már szerepelt az előfelmérésben is.

Az olyan számok, amelyek 9362... számjegyekkel kezdődnek, és utána csupa 0 áll, nem oszthatók 3-mal.

Az előfelmérésben úgy szerepelt a kérdés, hogy „Hogyan lehet bebizonyítani, hogy ha 6332-t elosztjuk 3-mal, akkor nem egész számot kapunk?". Ebben az esetben a dichotóm kategorizálással csak azt állapítottuk meg, hogy különbség van az „Osztással" és az olyan válasz között, amely a 3-mal oszthatóság szabályára hivatkozik. Egy konkrét szám oszthatósága esetében azonban még a rangskálás átkódolás sem feltétlenül helyesen fejezi ki, hogy a szabályra hivatkozás értékesebb, mint a konkrét művelet elvégzése. Univerzális állítás esetében viszont megállapítható különbség van a háttérben lévő gondolkodási stratégiában egy empirikus és egy deduktív állítás esetén.

A matematikai állításokhoz kapcsolódó kérdőív eredetileg matematika szakos hallgatók számára készült (*Almeida*, 1995). A kérdőíven tíz állítás szerepel, amelyek közül egyesek szerepeltetése szerintem rontja a mérőeszköz validitását. Azonban az eredeti adatokkal való összevethetőség miatt megtartottam mind a tíz mondatot, amelyek között különösen érdekesnek ígérkezett a következők vizsgálata:

Állítás	a Te véleményed				
Ha egy matematikai tételt bebizonyítottak, akkor biztos lehetek abban, hogy a tétel igaz.	-2	-1	0	1	2
Ha egy tétel nyilvánvalóan igaz, akkor nincs értelme bizonyítani.	-2	-1	0	1	2
A bizonyítások néha kétes érvényességű trükköket tartalmaznak.	-2	-1	0	1	2

-2: nagyon nem értek egyet; -1: nem értek egyet; 0: közömbös; 1: egyetértek; 2: nagyon egyetértek

A matematikatanári kérdőív ugyanazokat az állításokat tartalmazta, mint a tanulók kérdőíve. A tanároktól azonban nem a saját véleményük bekarikázást kértük, hanem a matematikából jelessel rendelkező 9. és 11. évfolyamosok véleményének megítélését. Ezzel az elrendezéssel azt kívántuk vizsgálni, hogy a matematikatanárok szerint mennyit változik két év alatt a legjobb tanulók véleménye egyes bizonyításokkal kapcsolatos állításokról. A matematikatanári kérdőív ezeken kívül kérdéseket tartalmazott a legfontosabb iskolai matematikai tételekre és két életkori határra vonatkozóan.

Ön szerint a gondolkodási képességek fejlesztése szempontjából melyik az iskolai tananyag három legfontosabb matematikai tétele és bizonyítása?
*Ön szerint hány éves korban találkozzanak a tanulók először indirekt bizonyítással?*____________
*Ön szerint hány éves korban kell tudnia egy tanulónak Pitagorasz tételét megfordítani?*____________

A matematikatanári kérdőív készítésével hármas célt igyekeztünk elérni: 1) Az egyes bizonyítástípusok tanári értékelése önmagában is fontos terület, amely a tanulói értékítélettel összevetve a fejlesztés számára adhat javaslatokat. 2) A tíztételes kérdőív fő feladata a tanulói kérdőív hasonló itemeivel való összevetés volt. Fontosnak ítéljük annak vizsgálatát, hogy a tanárok szerint a 9. és 11. évfolyam között milyen változások történnek a tanulók bizonyításokról alkotott képében. 3) A legfontosabb bizonyításokkal és az életkori határokkal kapcsolatos kérdések a tantervfejlesztés számára szolgáltatnak fontos információkat.

A „Gondolkodtató feladatok" teszt

A „Gondolkodtató feladatok" tesztet valamennyi évfolyamon fölvettük, és minden évfolyamon ugyanazok a feladatok szerepeltek. Ez az elrendezés megkövetelte tantárgy-független vagy már az ötödikesek számára is ismerős iskolai témák használatát. Azzal, hogy tesztünk ötödik és tizenegyedik osztályban egyaránt bemérésre került, kifejezzük azt a meggyőződésünket, hogy a képesség jellegű tudást vizsgáló kognitív feladatoknak minden korosztályban létezhet „jó" megoldása. A különböző évfolyamok teljesítményének összehasonlítását ugyanakkor olyan külső kritériumok szerint végezhetjük el, amely kritériumok explicit ismerete a felsőbb évfolyamokon lehet jellemző.

A gondolkodtató feladatok tesztje - a matematikai bizonyításokhoz hasonlóan - adott állításokhoz tartozó ötféle bizonyítás értékelésével kezdődik. A tesztben szereplő két állítás az előfelmérésben szerepelt feladatokból származik. A formai egyezőség kritériumának megfelelően a bizonyítandó állítások ebben a tesztben is kijelentő formában adott igaz állítások voltak.

Az előfelmérés során a bizonyításkategorizálás szempontjából problémás volt a Föld gömb alakjáról szóló feladat. Általában minden nem-matematikai állítás esetén nehézséget jelent a matematikai alapú bizonyításkategorizálásnak megfelelő bizonyításokat szerkeszteni. A legnagyobb problémát a szimbolikus és - univerzális kvantort nem tartalmazó állítás esetén - a deduktív bizonyítások okozzák. Az empirikus mutatók és a szóbeli interjúk kvalitatív információi is megerősítik azt a feltételezést, hogy a matematikai alapú bizonyításkategorizálás matematikán belül és kívül is elsősorban az univerzális állítások bizonyításaira alkalmazható.

Most a második feladatot, az előfelmérésből ismert tűzoltós-igazmondós feladatot mutatom be. Az előfelmérésben ténylegesen előfordult tanulói választípusokhoz képest csak a szimbolikus opció számít mesterségesen szerkesztettnek.

Egy képzeletbeli város lakói három csoportba tartoznak: vannak köztük igazmondók, akik mindig igazat mondanak; vannak hazugok, akik mindig hazudnak; és vannak felemások, akik felváltva mondanak igaz és hamis mondatokat. Egy éjszaka csöng a tűzoltóság telefonja, és a következő párbeszéd hangzik el:

Tűzoltó: Tessék, tűzoltóság.
Telefonáló: Ég a városháza.
Tűzoltó: Igazmondó vagy?
Telefonáló: Felemás vagyok.

Ezek után a tűzoltó azt állította, hogy nem ég a városháza, felesleges lenne kivonulni. Hogyan bizonyítható ez az állítás?

Az előfelméréshez képest változást jelentett, hogy a tanulónak nem kellett külön az igazságérték mellett is állást foglalnia.

A *tekintélyelvű bizonyítás* gyakran előfordult a nyíltvégű kérdésfeltevés esetén:

2. bizonyítás:

Nem ég a városháza, mert ilyen komoly dologgal nem lehet viccelni. Aki ezzel tréfát űz, azt jól meg kell büntetni. Az iskolában és otthon is azt tanítják, hogy a tűzzel nem szabad játszani.

A *rituális bizonyítás* ismert jegyei („tegyük fel, hogy..." logikátlan használata, a tárgytól elkanyarodó mondathalmozás) megfigyelhetők a következő opció esetén:

> *5. bizonyítás:*
>
> Tegyük fel, hogy ég a városháza, Ekkor a telefonáló hangja izgatottabb lett volna, ezért nem ég a városháza. Azt azért érdemes lenne tudni, hogy a városlakók között milyen arányban vannak igazmondók, hazugok, és felemások. Az a probléma, hogy ha csak egyetlen ember is felemás vagy hazug, akkor már esély van arra, hogy feleslegesen riasztják a tűzoltókat.

A *szimbolikus bizonyítás* lényege: matematikai jelölés bevezetésével hitelt adni a gondolatmenetnek, holott a szimbólum-manipuláció értelem nélküli.

> *3. bizonyítás:*
>
> Annak valószínűsége, hogy ég a városháza, legyen x. Annak valószínűsége, hogy felemás telefonált, legyen y. Ha y>x, akkor felemás telefonált. A felemás egyszer igazat mond, egyszer hazudik. Amikor azt mondta, hogy felemás, akkor igazat mondott. Ezért, amikor azt mondta, hogy ég a városháza, hazudott. Mivel y>x, ezért nem ég a városháza.

Nem-univerzális állításról lévén szó, az *empirikus bizonyítás*ra az jellemző, hogy a teljes bizonyítás egy részét tartalmazza, mintegy alátámasztva, de nem 100%-os bizonyossággal igazolva az állítást:

> *1. bizonyítás:*
>
> Ha ég a városháza, akkor nem igaz az, hogy felemás. Ha nem ég a városháza, akkor lehet felemás. Mivel azt mondta, hogy felemás, ezért az utóbbi a valószínű.

Az opció javítását szolgálná és növelné a validitást, ha a „valószínű" szó nem szerepelne a fenti gondolatmenet végén. Így ugyanis a valószínűség intuitív fogalmát is teszteljük egyúttal, amellyel kapcsolatban kevés magyarországi empirikus adatunk van.

A *deduktív bizonyítás* a logikailag lehetséges esetek szisztematikus számbavételét jelenti. Ez az opció jelenti a kulcsot abban a kérdésben, hogy milyen kapcsolat van a bizonyítástípusok megítélése és a bizonyítások konstruálása között - az empirikus kutatás szempontjából. Hipotézisünk szerint ugyanis jóval kisebb arányban adnak a tanulók deduktív bizonyítást nyíltvégű kérdés esetén, mint ahányan a legmagasabbra értékelik ezt az opciót:

> *4. bizonyítás:*
>
> A telefonáló nem lehetett igazmondó, mert ha az lett volna, akkor nem mondhatta volna, hogy felemás. Ha felemás volt a telefonáló, akkor igazat mondott, mikor azt mondta, hogy felemás, és hazudott, amikor azt mondta, hogy ég a városháza.
>
> Ha hazug telefonált, akkor mindkétszer hazudott. Ezért a városháza semmiképpen sem ég.

Az előfelmérés és a nagymintás mérés során is komoly dilemmát jelentett, hogy az opciók sorrendjének hatását milyen mértékben kell figyelembe venni, és milyen lehetőségek vannak a sorrendi hatás kompenzálására. A képesség jellegű tudás és a kontextus kapcsolatáról szóló fejezetben elmondottak szerint a sorrendi hatás több tényezőtől is függ. A hatás tényleges nagyságát többek között az is befolyásolja, hogy a tanulók milyen feladatmegoldó technikát alkalmaznak: valamennyi opció elolvasása után kezdenek csak hozzá a válaszlehetőségek osztályozásához vagy egyesével haladnak, és egyedi döntéseket hoznak, amit a később elolvasott opciók függvényében esetenként fölülbírálnak. A tanulók feladatmegoldási stratégiáit a szóbeli interjúk során igyekeztünk felderíteni. Úgy véljük, ebben a kérdésben a szóbeli interjú módszerének érvényessége felülmúlja a feladatmegoldásra vonatkozó esetleges írásbeli kérdésekét, de természetesen alatta marad a megfigyelési technikák validitásának. A jövőbeni kutatások számára kisebb mintát feltételezve a feladatmegoldás közbeni megfigyelés- vagy tanulói önmegfigyelés fontosságát hangsúlyozzuk.

A „Gondolkodtató feladatok" tesztben egy mesebeli történetbe ágyazva további feladatokat kaptak a tanulók. Először egy következtetési szabályrendszerre épülő feladatban kellett három opció közül választaniuk. A szabályrendszer a modus ponens, modus tollens, előtag cáfolata és a következmény megerősítése szabályokból állott, amelyek közül az első kettő determinisztikus, míg az utóbbi kettő plauzíbilis szabály. Valamennyi esetben tagadószó nélküli fő-premissza szerepelt. Példaképpen álljon itt a következmény megerősítése szabályt vizsgáló feladat:

„Ha 25 °C fölött van a hőmérséklet, akkor a lökötők a tengerparti strandon vannak." *Megtudták hőseink, hogy a lökötők a tengerparti strandon vannak. Mire következtettek ebből?* *a) 25 °C fölött van a hőmérséklet.* *b) Nem lehet eldönteni, hogy 25 °C fölött van-e a hőmérséklet.* *c) Nincs 25 °C fölött a hőmérséklet.*

A hétköznapi kommunikációban nagyon gyakran úgy értelmezzük a premisszát, hogy „akkor és csak akkor vannak a strandon, ha ...", és emiatt tekintjük a következményt determinisztikusan meghatározottnak. Ha egy tanuló rájön, hogy a két premissza alapján nem lehet eldönteni, hogy igaz-e a következtetés, akkor az a formális logikai iskolázottságot mutathatja. Eddigi vizsgálataink szerint azonban a plauzíbilis szabályok indetermináltságának felismerése gyönge korrelációt mutat az iskolai teljesítményt jellemző mutatókkal (*Csíkos*, 1996; *Csíkos és Józsa*, 1999).

A tesztlap két történelmi-régészeti témájú kérdéssel folytatódott. A fő célunk ezekkel a feladatokkal a tekintélyelvű és az empirikus bizonyítások közötti határvonal vizsgálata volt. Hipotézisünk szerint az ötödikesek körében fordul elő leggyakrabban, hogy tekintélyelvű bizonyítást adnak mindkét állításra. A szerkezetében nagyon hasonló két állítás lehetővé teszi a tartalmi hatás elemzését is.

Az 5. feladat egy hétköznapi tapasztalatot leíró esemény igazolását kérte. Hipotézisünk az volt, hogy az előző állításokhoz képest jóval kevesebben adnak majd tekintélyelvű bizonyítást. A 6. és 7. feladatban két *Rips* (1994) által empirikusan vizsgált következtetési sémára építettünk. Az első szabály az „és-elimináció" logikai szabály alkalmazását mérte, a második egy ezzel logikailag ekvivalens formát vizsgált. Mindkét esetben jellemző volt, hogy tág teret adott a feladat megszövegezése tekintélyelvű és empirikus bizonyítások megalkotásához is.

2.2.3. A szóbeli interjúk

A papír-ceruza tesztekkel kapcsolatban megfogalmazott validitási és objektivitási problémák miatt szükségesnek éreztük, hogy szóbeli értékelési eszközökkel egészítsük ki az írásbeli teszteket.

Az interjúk elkészítésére a nagymintás mérés után mintegy egy évvel került sor. Ennek elsődleges oka az volt, hogy az írásbeli tesztek kiértékelésének folyamata ekkorra zárult, és az írásbeli teszteken nyújtott teljesítmény alapján választottuk ki azt a néhány tanulót, akikkel az interjúk készültek. A két mérési időpont közötti egy éves intervallum ugyanakkor lehetőséget adott arra is, hogy néhány kísérleti személy gondolkodásában olyan jellegű változásokat állapítsunk meg, amelyek nem tudhatók be a két értékelési forma különbségének.

A minta kiválasztása

A minta kiválasztásában a következő szempontok érvényesültek:

- Mind a négy nagymintás mérésben szereplő korosztályból szerepeljenek tanulók
- Az egy-egy évfolyamból kiválasztott tanulók számának meghatározásánál két tényező irányadó: 1) Az interjúk elékészítésének célja elsősorban a kvalitatív elemzés, 2) A technikai lebonyolítás a lehető legjobban beilleszthető legyen az iskolák munkarendjébe
- Az iskolák kiválasztásában fontos szempont a földrajzi közelség
- Olyan tanulókkal készítsünk interjút, akik a nagymintás mérés során „komolyan vették" a tesztek kitöltését (Egy másik kutatásban érdekes lenne éppen azokat megkérdezni, akik a kognitív tesztet virágszirmokkal és a tesztkészítő elmeállapotára utaló megjegyzésekkel tarkították)
- Az interjúalanyok csak közvetlenül az interjú elkészítése előtt szerezzenek tudomást arról, hogy kiválasztottuk őket.

Mint látható, a minta kiválasztásának alapelvei egy évfolyamonkénti néhány fős mintát körvonalaztak, és egyúttal irányt mutattak az interjú-protokoll elkészítéséhez. Az iskolánkénti hat interjúalany a két interjút feltételezve a következő elrendezést indokolta:

5. táblázat. Az interjúk kísérleti elrendezésének sémája

	bizonyítások	természettudományos fogalmak
1. tanóra első része	1. k. sz.	2. k. sz.
1. tanóra második része	2. k. sz.	1. k. sz.
2. tanóra első része	3. k. sz.	4. k. sz.
2. tanóra második része	4. k. sz.	3. k. sz.
3. tanóra első része	5. k. sz.	6. k. sz.
3. tanóra második része	6. k. sz.	5. k. sz.

Ez a kísérleti elrendezés garantálta, hogy az időkihasználás maximalizálása mellett a soron következő interjúalany csak az interjú kezdete előtti tanítási szünetben tudta meg, hogy ő következik, és ugyanakkor a tanórák menetét sem zavartuk meg.

Az interjú protokoll

Az interjú kérdéseinek megfogalmazásánál figyelembe kellett venni, hogy különböző életkorú tanulók számára egyaránt válaszra inspiráló és ugyanakkor lényeges információra vonatkozó legyen a kérdés. Az interjú első egy-két percében annak a tanulónak, akinek ez volt az első interjúja (tehát az adott tanítási óra első felében került sorra), elmagyaráztam, hogy az interjú egy tavalyi méréshez kapcsolódik, és tudományos kutatási célokat szolgál. Az interjú során a tanuló elé helyeztem a „Gondolkodtató feladatok" tesztnek azt a példányát, amit egy évvel korábban ő oldott meg. Egy percnyi időt hagytam, hogy a tanuló átnézze a tesztlapot, és emlékezetében fölidéződjenek a feladatok. A kérdéseket a tesztlap közös átnézése során tettem föl, így az itt leírt kérdések önmagában vett kétértelműségét, utalószavait a kontextus értelmezést elősegítő szerepe tette világossá. Több esetben ad-hoc jellegű kiegészítő kérdéseket is föltettem, például akkor, ha a tesztlapon egy önellentmondásosnak látszó gondolatot fedeztünk föl.

A következő kérdéssor szerepelt valamennyi interjúban:

1. *Milyen sorrendben oldottad meg a feleletválasztós feladatokat? Először elolvastad mindet, és csak azután osztályoztál, vagy inkább egyesével haladtál?*
2. *A legtöbb tanuló azt a számadatot írta a vonalra, amelyhez tartozó választ korábban a legmagasabbra értékelte. A te esetedben is így történt?* vagy *A te esetedben miért nem így történt?*
3. *Van, aki egyik válaszra sem adott ötöst. Lehetne jobbat találni?*
4. *Szerinted hogyan függ össze a nyilvánvalóság és a bizonyítás szükségessége?*
5. *A 2. feladatról: Nem került a felsorolt válaszlehetőségek közé, de egy korábbi felmérésben előfordult, hogy valaki azt válaszolta: „Nem ég a városháza, mert ez egy képzeletbeli város. Hány pontosra értékelnéd ezt a választ? Honnan lehet tudni, hogy milyen típusú válaszra van szükség egy ilyen feladatban?*
6. *Zavaró-e, hogy több feladatban lovagok és lókötők szerepelnek? Milyen szereplőkkel lehetne őket helyettesíteni, hogy a feladat barátságosabb legyen?*
7. *Mi a véleményed arról a bizonyításról (4. feladat), amikor valaki egy régész vagy a történelemtanár véleményére hivatkozva bizonyít? Értékesebb ez, kevésbé értékes vagy ugyanolyan értékes, mint amikor valaki a régészeti leletekre hivatkozik?*
8. *Mi lehet az oka, hogy az 5. feladatnál csak nagyon kevesen hivatkoznak egy tudós tekintélyére? Szerinted miért van az, hogy csak nagyon kevesen gondolják azt, hogy a kísérlet elvégzése bizonyító erejű?*
9. *Hogyan lehetne hétköznapi helyzetbe helyezni a 6. és 7. feladatot, hogy azokat egy kisgyermek is barátságosnak találja?*
10. *Képzeld azt, hogy egy rakás mérges gomba van itt az asztalon. Bejön az ajtón egy kisgyerek. Hogyan fogod elhitetni vele, hogy a gomba mérgező? Képzeld azt, hogy az egyik osztálytársad jön be az ajtón. Neki hogyan bizonyítanád be, hogy a gomba mérgező. Vajon egy gombakutató hogyan bizonyítja be a többi tudós számára, hogy egy újonnan felfedezett gombafaj mérgező?*

Az érettségi előtt álló tizenkettedikesek számára a fenti kérdéssor előtt néhány matematikai bizonyításokkal kapcsolatos kérdés szerepelt.

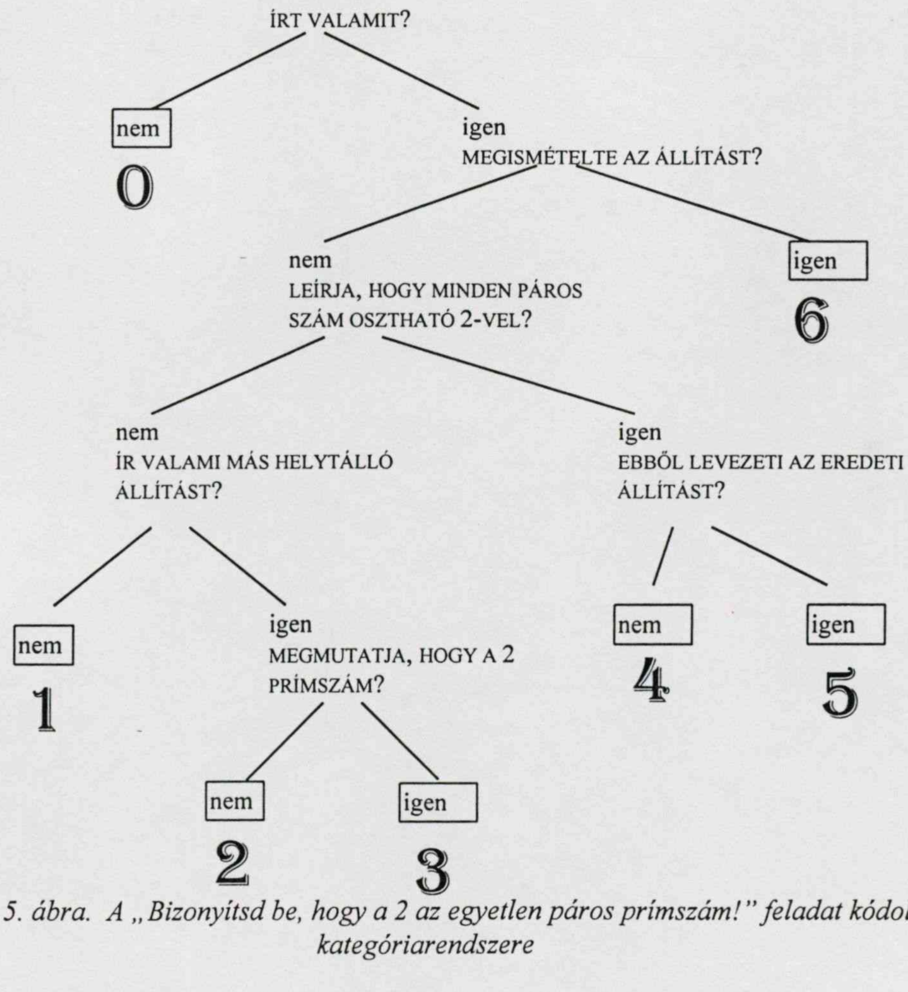
2.3. Nominális és ordinális skálák a bizonyítási képesség értékelésében

Az előfelmérés adatelemzésének első feladata az adatrögzítés volt. A kódolást és az adatok számítógépre vitelét 1998 nyarán végeztem. A kódolás során a nyíltvégű feladatok értékelésével, pontozásával kapcsolatos alapelveket össze kellett egyeztetnem a képességmérés alapelveivel. Ez a gyakorlatban azt jelentette, hogy első lépésben nominális kategóriákat alakítottam ki minden egyes feladatra, s így lehetővé vált a válaszok kategorizálása. A kódolás második fázisában a nominális kategóriákat kellett ordinális skálán elhelyezhetőre átkódolni, mert képesség fejlődéséről beszélni (egyáltalán: valamit fejlettebbnek nevezni) csak úgy lehetséges, ha létezik egy rangskála, amihez viszonyítunk.

A nominális kategóriák

Valamennyi nyíltvégű feladat esetén kidolgoztam egy nominális értékelési rendszert. A válaszok kategorizálásánál gyakorta előforduló problémával itt is szembesültem: Mi a teendő, ha a tanuló válasza több olyan elemből épül fel, amelyek önmagukban különböző kategóriákba tartoznak? Ordinális értékelési skála esetén abba a kategóriába soroljuk ilyenkor a tanulói választ, amely kategóriába a sorrendben először leírt válaszelem alapján kerülne.

A kategorizálás előbb említett problémáját kiküszöbölendő feladatonként egy-egy dichotóm értékelési rendszert szerkesztettem. A következő ábrán az egyik legegyszerűbb dichotóm kategória-rendszert mutatom be.



5. ábra. A „Bizonyítsd be, hogy a 2 az egyetlen páros prímszám!" feladat kódolási kategóriarendszere

A rendszer nem tartalmazza a válaszok hierarchiáját abban az értelemben, ahogyan a bizonyítástípusok hierarchiájáról az eddigiekben szó volt. A dichotóm értékelési rendszer hierarchiája a válaszok „karakterességének" hierarchiáját jelenti. Arról van szó, hogy amikor több szempont szerint kell besorolni egy választ valahová, és nem akarunk mindkét szempont szerint egymásra vetített kategóriákat létrehozni, akkor meg kell mondani, hogy melyik szempont élvez elsőbbséget. Az ábra alapján nyilvánvaló, hogy a választípusokhoz rendelt számok nem fejezik ki a válaszok hierarchiáját oly módon, hogy a nagyobb szám értékesebb választ jelöl. Az elágazások egymásutánja, amely az előbb említett „karakteresség" kifejezője, több száz dolgozat átnézése után alakult ki, az empirikus válaszgyakoriságok figyelembevételével.

Az említett konkrét feladatban az állítás matematikai bizonyításához két dolgot kell megmutatni. Egyrészt azt, hogy a 2 páros prímszám, másrészt azt, hogy a többi páros szám nem prím. Elképzelhető, hogy valaki csak az első állítással boldogul: ő a 3-as kategóriába esik. Voltak, akik a második állítás egy fontos elemét írták le, ti. azt, hogy minden páros szám osztható 2-vel, de nem jutottak tovább: ők a 4-es kódot kapták. Akik korrekt bizonyítást adtak, azok az 5-ös kódot kapták ennél a feladatnál. A nagymintás mérésekben szokásos egyéb nominális kategóriák közül az üres lap (0), az irreleváns információ (1) és a feladat állításának megismétlése (6) teszi teljessé a rendszert.

A nominális kategóriák közötti jelentős különbségek csak akkor alakíthatók át a tudásbeli különbségeket tükröző pontszámokká, ha találunk valamilyen szempontot, amely szerint a nominális változóink ordinálissá újrakódolhatók. Az előfelmérés idején kaptam meg *Guershon Harel*től a megjelenés alatt lévő tanulmányukat (*Harel* és *Sowder*, 1998), amelynek háromszintű hierarchikus kategóriái a nominális változók újrakódolásához megfelelő alapot nyújtottak.

Az ordinális kategóriák

A tanulói válaszok rangskálán elhelyezésének egyik módja az lehetett volna, hogy a tesztlapra közvetlenül rákerül az ordinális kategória kódszáma is. Ez - a nominális kategóriarendszer meglétét feltételezve - aránytalanul hosszú kódolási procedúrát jelentett volna. A másik lehetőség, amelyet ténylegesen alkalmaztunk, a nominális kategóriák átkódolása volt. Ebben az esetben garantálva van, hogy azonos nominális kódhoz azonos rangszámot rendelünk, de ugyanakkor az eredeti válasz két kódolási folyamaton megy keresztül. Ezért ezen a ponton szükséges, hogy a nominális kategóriák ordinálissá átkódolása szakértők véleményének egyezésén alapuljon.

Az átkódolás folyamatát a szakértők véleménye egyezésének mérésére szolgáló Kendall-féle konkordancia-együtthatóval jellemezhetjük. A konkordancia-együttható értéke az összes átkódolandó változóra együttvéve $W=0{,}909$ volt (szakértők száma: 3), ami $p<0{,}001$ szinten szignifikáns. Ez az 1-hez közeli érték a szakértők egyezésének magas fokát mutatja, és további pozitívum, hogy valamennyi esetben 3:0 vagy 2:1 arányban döntés született arról, hogy egy konkrét kategória milyen ordinális kódot kap.

Az előfelmérés tesztjeinek adataiból zömmel nominális és ordinális változókat generáltunk, a nagymintás mérés esetében a változóink zöme ordinális, de sok esetben intervallum-változónak tekinthető. A hipotéziseink matematikai statisztikai elemzése több esetben a középértékre vagy a változók közötti összefüggés szorosságára vonatkozó hipotézisvizsgálatot jelentett. Széleskörűen felhasználtunk többváltozós összefüggés-vizsgálatokat is. A változóink jellemzésére számos esetben a leíró statisztikai módszerek is hasznosnak bizonyultak.

A pedagógiai kutatásokban széleskörűen elterjedt statisztikai módszerek mellett módszertani szempontból érdekességet jelent a nem-paraméteres statisztikai eljárások felhasználása. Ezen túlmenően a reliabilitás vizsgálata során és a többváltozós elemzésekben (többdimenziós skálázás, path-analízis) alkalmaztunk a pedagógiai kutatások gyakorlatában még viszonylag ritkán használt eljárásokat.

3. Eredmények

3.1. Az előfelmérés eredményei

Az előfelmérés során megoldandó feladatok közé tartozott az adatfeldolgozási módszerek kipróbálása is. Éppen ezért a ténylegesen elvégzett számítások köre sokkal bővebb ahhoz képest, ami a disszertáció ezen fejezetébe bekerült. A szelekció elsődleges szempontja az volt, hogy a nagymintás mérés adatfeldolgozása számára előzményt jelentő módszereket mutassuk be. Egy másik szempont volt, hogy a bemutatott módszerek együtt egységes adatelemzési folyamatot reprezentáljanak - főleg a szakirodalmi áttekintés során felvetett problémákra összpontosítva.

3.1.1. Az előfelmérés feladatain nyújtott tanulói teljesítmények jellemzése

Az előfelmérés feladatain nyújtott teljesítmények bemutatását a mérőeszköz jóságmutatóinak jellemzésével kezdjük. A pedagógiai mérőeszközöket három jóságmutató, az objektivitás, a reliabilitás és a validitás alapján vizsgáljuk (*Csapó*, 1993).

Az objektivitás biztosítása egyrészt az adatfelvétel tárgyszerűségét jelenti, vagyis azt, hogy a teszten elért eredmények csak a tanuló tudásától és a teszt nehézségétől függenek. Mivel az egyik iskolában mérőbiztosként felügyeltem a tesztek megírását, valós szituációkban láttam megerősítve azt a hipotézisemet, hogy a teszten elért eredmény számos olyan tényezőtől függ, amelyeket egy több ezer fős felmérésben nem lehet egyformán garantálni minden iskolában. Ha például a tesztmegíratás során a tanteremben tartózkodik a tanórát dolgozatjavításra felhasználó osztályfőnök, teljesen más a tanulók hozzáállása, mint ha csak a számukra ismeretlen mérőbiztos felügyeli a csendet és a komoly munkát. Egyelőre nem állnak rendelkezésünkre olyan empirikus adatok, amelyekkel kvantifikálni lehetne az imént leírt hatásokat, de a jövőbeni kutatások számára egy újabb szempontot jelenthet a tesztmegírás körülményeinek leírása.

Az objektivitás másik dimenziója a javítás, kódolás tárgyszerűségére vonatkozik. A javítás objektivitását két módon lehet növelni: vagy több személy is végigjavítja valamennyi tesztet, vagy a javítás szempontjait kell részletezni, már-már atomizálni. Az előfelmérésben és a nagymintás mérés során is ez utóbbi megoldást választottuk. Az előzőekben már említettem a dichotóm kategória-rendszerek kidolgozásának alapelveit. Most azt a problémát vesszük szemügyre, amikor a legkifinomultabb kódolási útmutató esetén is problémát jelenthet a válasz kódolása. Arról az esetről van szó, amikor a tanuló terjengős választ írt, amelyben többféle válaszelem felismerhető, és ezek az elemek különböző kategóriákba sorolnák a választ. Ilyen esetekben mutatkozik meg annak jelentősége, hogy a nominális kategóriáink fagráfja egyben egy döntési algoritmust mutat a kategorizáláshoz. Még így is adódhatnak olyan válaszok, amelyekben egymásnak ellentmondó elemek találhatók. Ilyenkor az objektivitást az biztosítja, ha minden esetben a válaszban előbb felbukkanó válaszelem szerint kategorizálunk.

Az objektivitás harmadik dimenziója, az interpretációs objektivitás arra vonatkozik, hogy a teszten elért eredményekből lehet-e szubjektív elemeket kizáró következtetéseket levonni a tanulói teljesítményekre vonatkozóan. Ez a probléma akkor vetődik föl élesen, amikor tesztpontszámok alapján a tanulókat néhány kategóriába kívánjuk besorolni. Mivel azonban a bizonyítási képesség fejlődésével és fejlettségével kapcsolatban megfogalmazott modellünkkel nem lett volna összhangban az, ha csak egyetlen számértékkel jellemeznénk a bizonyítási képességet, az interpretációs objektivitás kérdése nem került előtérbe a kutatás során.

A reliabilitás vizsgálatát az előfelmérés jellegéből adódóan elhagytam. A reliabilitás ugyanis azt számszerűsíti, hogy egy adott teszt itemei hasonlóan különítik-e el egymástól az átlagosnál jobb és az átlagosnál gyöngébb teljesítményeket. A „Gondolkodtató feladatok" tesztben ugyanakkor tartalmi és - ami most lényegesebb - formai szempontból nagyfokú diverzitást mutatnak a feladatok; éppen azért, hogy megvizsgáljuk, milyen típusú feladatok kerüljenek később a nagymintás mérés tesztjébe.

A „Gondolkodtató feladatok" validitásával látszólag nem lehet probléma, mert a teszt azért készült, hogy a bizonyítási képesség empirikus tanulmányozásában megtegyük az első lépéseket. Ha azonban a validitás számtalan dimenziója (ld. *Nagy*, 1975) közül néhány fontosat sorra veszünk, akkor rengeteg kérdés vetődik föl. A tartalmi validitás elemei közül a mintavételi validitás dimenziója felveti azt a problémát, hogy melyek azok a feladatok, amelyeknek feltétlenül szerepelniük kell egy ilyen tesztben, és van-e a tesztbe bekerült feladatok között olyan, amelynek más mérőeszközben a helye. A funkcionális validitás azt fejezi ki, hogy a teszt megoldása során azok a pszichikus funkciók működnek-e, amelyek mérésére a tesztet szerkesztettük. Képesség-tesztek esetében a funkcionális validitás biztosításának elengedhetetlen feltétele, hogy különböző tartalmú feladatok kerüljenek elő. Ugyanakkor a legtöbb feladat esetében csak a későbbi empirikus elemzések adhatnak választ arra a kérdésre, hogy a feladatok megoldása mennyiben volt szituációba ágyazott, mennyiben volt kontextus-függő, és mennyiben egy általános gondolkodási képesség működésének megnyilvánulása. A skálázási validitás problémája a pontozás kérdéseire vonatkozik. Lehetséges-e a válaszkategóriákat úgy pontozni, hogy a kapott pontszámok összege a bizonyítási képesség fejlettségének mérőszáma legyen? A validitás itt említett problémái valójában éppen az előfelmérés létrejöttének előmozdítói voltak; ha mind a három kérdésre tudtuk volna a választ a tesztszerkesztés időszakában, akkor az előfelmérés szerepe az adatfeldolgozási és eredményközlési módszerek kidolgozására korlátozódhatott volna.

A teszt jóságmutatóiról elmondottak figyelembevételével az előfelmérés eredményeinek közlése szükségképpen feladat-centrikus lesz. S mivel a változóink többsége nominális és ordinális, elsősorban leíró statisztikai jellemzésekre és nem-paraméteres hipotézisvizsgálatokra nyílik lehetőség. Ezzel szemben a nagymintás mérésnél éppen fordítva lesz: az elemzések többsége többváltozós paraméteres statisztikai eljárásra épül.

Az egyetlen feladat, amely mind a négy korcsoport mindkét tesztjében szerepelt, az „ég-e a városháza?" feladat volt. A 6. táblázatban összehasonlítjuk az egyes évfolyamokra jellemző válaszmintázatok százalékos gyakoriságát ebben a feladatban. A táblázat bemutatásával egyrészt értékeljük az adott évfolyamon (illetőleg adott középiskolai típusban) jellemző választípusokat, másrészt megpróbáljuk a különbségek okait feltárni.

6. táblázat. Az „ég-e a városháza?" feladat válaszmintázatainak százalékos gyakorisági eloszlása évfolyamonként és iskolatípusonként (%)

válaszkód	5. osztály (N=594)	7. osztály (N=563)	9. osztály gimnázium (N=241)	9. osztály szakközépisk. (N=412)	11. osztály gimnázium (N=210)	11. osztály szakközépisk. (N=307)
0	2,2	1,8	1,2	4,1	1,0	2,3
1	2,5	3,6	2,1	3,6	-	1,3
2	2,9	3,7	3,3	7,8	3,3	2,6
3	3,5	1,2	-	4,1	1,0	2,9
4	20,4	19,0	11,2	13,6	8,1	12,1
5	6,6	4,8	1,2	5,1	2,4	3,9
6	2,9	2,3	-	-	1,0	0,3
7	3,2	2,1	2,5	1,7	1,4	1,6
8	11,3	12,6	12,4	17,0	10,5	18,6
9	3,9	5,9	2,9	7,3	5,2	9,4
10	2,0	1,8	3,3	4,6	-	7,2
11	4,4	14,0	49,8	16,0	61,9	27,0
12	5,9	5,2	2,9	4,4	1,9	2,9
13	12,8	10,3	2,9	7,5	1,0	4,9
14	13,6	10,7	3,3	3,2	1,4	2,6
41	0,2	-	0,4	-	-	0,3
42	1,2	0,7	-	-	-	-
43	0,7	0,4	0,4	-	-	-
összesen	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0

A legjellemzőbb válaszmintázatok a következők voltak:

a) Logikus magyarázat, a lehetséges esetek áttekintésével (kódszám:11). Az általános iskolások igen kis százalékarányban adták ezt a választípust. A szakközépiskolások ennél nagyobb arányban, míg a gimnazisták esetében a százalékos válaszgyakoriság kimagaslóan magas. A magyarázat részben a gondolkodási képességek különböző szintű komponenseinek fejlődésében keresendő. Ha a gimnazisták és szakközépiskolások mintáját összevonjuk, azt találjuk, hogy valamikor a hetedik és kilencedik évfolyam között a legnagyobb mértékű a változás. Ebben természetesen szerepe van a már említett szelekciónak is.

A továbbtanulás szelektáló hatása azonban nem ad magyarázatot arra, hogy miért van olyan nagy különbség a gimnazisták és a szakközépiskolások között. A magyarázatnak legalább három dimenzióra kell kiterjednie: 1) Lehetséges, hogy a gimnázium nagyobb mértékben fejleszti azokat a gondolkodási képességeket, amelyek ilyen jellegű feladatok megoldásához szükségesek. 2) Valószínű, hogy a gimnázium nagyobb mértékben szoktatja hozzá a tanulókat ilyen típusú fejtörők megoldásához, ahol a feladathoz hozzá tartozik az elvárt válasz típusának ismerete. 3) A tesztmegíratás körülményei mások lehettek a két iskolatípusban. Gondoljunk arra, hogy egy-két tanuló, aki közbekiabálással zavarja vagy félrevezeti társait, képes egy egész osztály teljesítményét lerontani.

Mindhárom említett tényező mellett szólnak bizonyítékok: 1) A későbbiekben látni fogjuk, hogy a bizonyítási feladatok belső összefüggésrendszere azt mutatja, hogy a gimnazisták esetében nagyobb mértékben alakul ki állítások igazolásának tárgyfüggetlen gondolkodási képességrendszere. „Az iskolai tudás" vizsgálat szintén megerősítette azt a feltételezést, hogy a tanulói tudásrendszert jellemző kapcsolatrendszer a gimnáziumi 11. évfolyamos tanulók esetében szorosabb, mint az általános iskolás tanulók mintáján

(*Vidákovich* és *Csíkos*, 1998). 2) A feladattípus megszokottsága avagy szokatlansága mint magyarázó tényező mellett szól, hogy a szakközépiskolások körében nagyobb arányban fordulnak elő olyan választípusok, amelyek nem tartalmaznak logikai jellegű elemzéseket. 3) A szakközépiskolások között még az általános iskolásokénál is nagyobb arányban vannak a választ megtagadók (4,1 ill. 2,3%). Az adatrögzítés során tapasztaltam, hogy a hiányzó adatok aránya egyes osztályokban hirtelen felszökött, ami véleményem szerint részben a tesztmegíratás körülményeivel hozható összefüggésbe.

b) A konkrét szociális interakcióból következtetés (13-as és 14-es kód). A 13-as válaszkód olyan válaszokat jelölt, amelyben a válaszadó szerint ég a városháza, és ennek indoklása során a tekintélyelvre, a helyzet komolyságára hivatkoznak. A 14-es válasz szerint viszont nem ég a városháza, de az indoklásban ugyancsak a konkrét interakcióból merít: nem elég izgatott a hangja, már más is telefonált volna stb.

A szociális interakció elemzésén alapuló válaszok gyakorisága az általános iskolában még viszonylag magas (5. osztály: 26,4%, 7. osztály: 21%), ugyanakkor szakközépiskolában 12,1% ill. 7,8%, gimnáziumban pedig 6,2% ill. 2,4%. Mivel feltételezhető, hogy a szociális alapú válaszok konstruálásának képessége az életút fejlődése során nem fejlődik vissza, az itt látott tendenciában az iskola hatását érhetjük tetten.

c) A felemásság hibás értelmezésére épülő válaszok (kód: 3, 4, 41, 42, 43). Általános iskolások körében ezek előfordulása a leggyakoribb, 5. és 7. osztály között a csökkenés csak kismértékű. Ugyanakkor a 42 és 43 kódok alacsony gyakoriságából az is nyilvánvaló, hogy csak nagyon kevesen vannak már az általános iskola felső tagozatán is, akik nincsenek tisztában a logikai állítás intuitív fogalmával. A 4-es válaszkódú állítások gyakori előfordulása azt mutatja, hogy a felemásság állítások egymásutániságával kapcsolatos értelmezése olyan metakomponensek működtetését teszi szükségessé, amelyek még a gimnázium 11. osztályában sem tekinthetők kialakultnak.

A három fő választípus-csoporton kívül eső megoldások közül azt a választ, amelyben a tanuló leírja, hogy nem ég a városháza, mert ez csak egy képzeletbeli városháza, különlegesnek nevezem, mert nem számítottam a felbukkanására. Valószínűleg azok is, akik ilyet adtak, sejtették, hogy nem ez az elvárt helyes válasz. Látható az „ég-e a városháza?" feladat példáján, hogy az egyes feladatokban előforduló válaszok gyakoriságának vizsgálata hatalmas tárházát jelenti a tanulói gondolkodás kutatásának.

A továbbiakban néhány másik feladat érdekesebb válaszmintázatainak előfordulási gyakoriságát vizsgáljuk. Elsőként azokat a feladatokat tekintjük, amelyek mind a négy korosztály tesztjében benne voltak. A „fiatalok hallása" és a „zsiráfnyak" feladatok hasonló szerkezetűek voltak; mindkettő a körben forgó okoskodás felismerésér vizsgálta. Ezt a kitűzött célt a „fiatalok hallása" feladat jobban megvalósítja, mert ott mindkét állítás hasonlóan hihetőnek tűnik. A jellegzetes válaszmintázatokat tekintve érdemes a 3-as kódú válasz arányát figyelni, mert ez jelzi a körben forgó okoskodás explicit felismerését. Az előző feladathoz képest az 5. és 7. osztályosok közötti nagyobb különbség sejtetni engedi, hogy a körben fogó okoskodás explicit felismeréséhez szükséges gondolkodási komponensek 12 éves kor táján jelentősebb fejlődésnek indulnak. A gimnazisták és a szakközépiskolások teljesítménykülönbségével kapcsolatban ugyanazokat az okokat lehet felsorolni, mint az „ég-e a városháza?" feladatnál.

A „fiatalok hallása" feladatban a következő válaszgyakoriságokat találtuk:

7. táblázat. A „fiatalok hallása" feladat válaszmintázatainak százalékos gyakorisági eloszlása évfolyamonként és iskolatípusonként (%)

			9. osztály		11. osztály	
	5. osztály	7. osztály	gimnázium	szakközépisk.	gimnázium	szakközépisk.
válaszkód	(N=305)	(N=284)	(N=117)	(N=207)	(N=110)	(N=156)
0	3,3	3,5	4,3	10,6	2,7	9,0
1	13,1	11,6	3,4	9,7	1,8	10,3
2	8,9	12,0	17,1	14,5	9,1	11,5
3	4,3	10,9	36,8	11,1	40,9	21,2
4	61,6	55,3	32,5	45,9	38,2	40,4
5	8,9	6,7	6,0	8,2	7,3	7,7
összesen	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0

A jellegzetes válaszmintázatokat tekintve érdemes a 3-as kódú válasz arányát figyelni, mert ez jelzi a körben forgó okoskodás explicit felismerését. Az előző feladathoz képest az 5. és 7. osztályosok közötti nagyobb különbség sejtetni engedi, hogy a körben fogó okoskodás explicit felismeréséhez szükséges gondolkodási komponensek 12 éves kor táján jelentősebb fejlődésnek indulnak. A gimnazisták és a szakközépiskolások teljesítménykülönbségével kapcsolatban ugyanazokat az okokat lehet felsorolni, mint az „ég-e a városháza?" feladatnál.

A következőkben a következtetési szabályokkal kapcsolatos feladatokra térünk rá. Az egyik változatban a modus ponens és modus tollens szabályok elfogadottságát vizsgáltuk - konkrét, ismerős tartalom esetén. Mint az elméleti áttekintés során megállapítottuk, a modus ponens szabály a matematikai bizonyításokban kulcsszerepet játszó egyszerű következtetési szabály, amelynek használata már hat éves kor körül megfigyelhető. A modus tollens a gyakorlatban szintén széles körben használt következtetési szabály, de a kutatások szerint laboratóriumi körülmények között a modus tollens használata nehezebbnek bizonyul a modus ponensénél.

A „Kinga okos" feladatban háromfokozatú skálán kellett megjelölnie a tanulónak, hogy szerinte az adott következtetési szabályok (először a modus ponens, majd a modus tollens) közül melyik alkalmas a konklúzió bizonyítására. A két következtetési szabály feladatában az egyes évfolyamokon a következő relatív válaszgyakoriságok fordultak elő:

8. táblázat. A „Kinga okos" feladat válaszmintázatainak százalékos gyakorisági eloszlása évfolyamonként és iskolatípusonként (%)

			9. osztály		11. osztály	
	5. osztály	7. osztály	gimnázium	szki.	gimnázium	szki.
modus ponens	N=253	N=262	N=117	N=190	N=96	N=
hibátlan	56,1	51,2	53,9	51,0	62,5	50,0
sem-sem	37,6	43,1	39,3	45,3	25,0	45,2
teljesen rossz	6,3	5,7	6,8	3,7	12,5	4,8
modus tollens	N=255	N=251	N=119	N=182	N=96	N=145
hibátlan	29,4	31,5	24,4	33,0	28,1	29,7
sem-sem	55,3	57,4	62,2	54,9	58,3	56,5
teljesen rossz	15,3	11,1	13,4	12,1	13,6	13,8

A válaszmintázatokban lévő különbségek elemzése során fölvetődik a kérdés, hogy a mintázatokban meglévő különbség statisztikai próbával, kvantitatív módon jellemezhető-e. Az eloszlás-mintázatok egyezésének vizsgálatára a χ^2- és a Kolmogorov-Szmirnov-próba alkalmas. Ezek a próbák azonban semmitmondók lehetnek éppen a lényeget, a mintázatok konkrét különbségeinek jellemzésében. A fejlődési tendenciák matematikai statisztikai vizsgálatára elsősorban nem-paraméteres elemzéseket végzünk majd.

A táblázat elemzése során levonható következtetések közül most kettőt emelünk ki: 1) Életkor és iskolatípus szerint nincs jelentős különbség a válaszmintázatokban. A kétmintás Kolmogorov-Szmirnov-próba a számszerűleg legnagyobb különbséget mutató ötödikesek és a kilencedikes gimnazisták összehasonlítása során az eloszlások egyezését támasztja alá ($p=0,66$, illetve $p=0,76$). 2) A modus ponens szabály sokkal elfogadottabb, nagyobb bizonyító erővel bír, mint a modus tollens szabály. Ezt legegyszerűbben a Wilcoxon-próbával bizonyíthatjuk ($p<0,001$ valamennyi évfolyam esetében).

Az első következtetésünkkel kapcsolatban felfigyelhetünk a 11. évfolyamos gimnazisták válaszgyakorisági mintázatára. Közöttük a legnagyobb azok aránya, akik a modus ponens szabályt bizonyításra alkalmasnak találják, de azok aránya is itt a legmagasabb, akik szerint az adott konkrét bizonyítás teljesen rossz. Ezek az eredmények a metakognitív-metadeduktív tudatosság jelenlétét támaszthatják alá. A második észrevétellel kapcsolatban arra hívjuk fel a figyelmet, hogy mivel a két következtetési szabályra vonatkozó feladat közvetlenül egymás után szerepelt és hasonló tartalommal, feltehetőleg mesterségesen megnöveltük ezzel a különbséget a két szabály megítélése vonatkozásában.

Összefoglalóan a feladat tanulságaként azt mondhatjuk, hogy a modus ponens és modus tollens - bizonyításokban használható - szabályokról alkotott kép nem változik jelentősen az iskolai évek során. Elképzelhető ugyanakkor, hogy a hasonló gyakoriság-mintázatok hátterében valójában egészen eltérő gondolkodási folyamatok állnak: erre utal a 11. évfolyamos gimnazisták érdekes relatív gyakorisági táblázata a modus ponens esetében. A modus tollensről újólag kiderült, hogy a tanulók számára a modus ponenshez képest kevésbé kezelhető következtetési szabály. Eredményeink alapján ugyanakkor felvethető, hogy nem lehetne-e ezt is felsorolni a „természetes logikai" szabályok között. Bár *Braine* (1990) és *Rips* (1994) nem szerepeltetik rendszerükben, *Osherson* (1975, idézi *Braine*, 1990) úgy vélte, hogy a modus tollens szabály is a logikai tanulmányok nélkül is jól használható következtetési szabályaink közé tartozik.

A fejlődés jellemzéséhez szükséges a gimnáziumi és szakközépiskolás részmintákat egyesíteni. Így is fölvetődik a probléma, hogy az általános és középiskolás tanulók közötti esetleges különbség nagymértékben a továbbtanulás során működő szelekció miatt van. „Az iskolai tudás" könyvben (*Csapó*, 1998) azt a megoldást alkalmaztuk, hogy az általános iskolai mintából az összehasonlítás céljára egy korrigált részmintát képeztünk, amelyben csak a tanulmányi átlag szerinti felső 2/3-nyi tanuló szerepelt. Ennek ésszerű magyarázata van: az általános iskolai tanulók mintegy 2/3-a tanul tovább gimnáziumban vagy szakközépiskolában. Mivel a továbbtanulásban nagyon nagy szerepe van a tanulmányi átlagnak, a szelektált középiskolai minta és az általános iskolás minta összehasonlítása így kisebb mértékben torzul.

Kutatásomban nem kívánom mechanikusan átvenni a „kétharmados elvet". Ennek egyik oka, hogy településtípustól, iskolától is nagymértékben függ, hogy milyen tanulmányi átlag fölött döntenek úgy a szülők és a tanulók, hogy a gyermek érettségit adó középiskolában folytatja tanulmányait. *Andor* és *Liskó* (2000, 138. o.) eredményei szerint nincs olyan határvonal a tanulmányi átlagban, amely alatt szakmunkásképzőbe, fölötte pedig szakközépiskolába vagy gimnáziumba jelentkeznek az általános iskolát befejező tanulók. Kutatási eredmények szerint az is jellemző, hogy a községekben tanuló általános iskolások alulreprezentáltak az érettségit adó középiskolákban. A másik ok, ami miatt nem használunk az összehasonlításhoz „korrigált" általános iskolai mintákat az, hogy pedagógiai szempontból az egyén gondolkodásfejlődésének jellemzése mellett fontos feladat az egyes életkorokra, iskolatípusokra jellemző adatok statisztikai leírása is. Bár a fejlesztéshez kétségkívül az egyéni fejlődés menetét kell ismerni, az oktatási rendszer tágabb összefüggéseiben (tantervkészítés, tankönyvírás) az átfogó statisztikai mutatókra lehet nagyobb mértékben támaszkodni. Azt mindenképpen le kell szögeznünk, hogy a pszichológiai értelemben vett fejlődés leírásához longitudinális vizsgálatokra van szükség.

Az előfelmérés eredményeinek leíró statisztikai elemzése során - mint arra már utaltunk - nem törekedtünk teljességre. Mivel az előfelmérés elsődleges feladata a nagymintás mérés mérőeszközének kifejlesztéséhez szükséges empirikus elemzések elvégzése, az eddigiekben azokból az eredményekből válogattunk, amelyek a mérőeszköz-fejlesztésen túl a bizonyítási képesség szerkezetéről, fejlődéséről szóló hipotéziseinket támogatták avagy cáfolták. A következőkben azokból az eredményekből válogatunk, amelyeket a bizonyítási feladatok választípusainak átkódolásával nyertünk. Az előző fejezetben vázolt kódolási eljárás segítségével a tanulói válaszokat három kategóriába soroltuk: 1) externális bizonyítások (ide tartoznak a *Harel* és *Sowder* (1998) taxonómiájából ismert tekintélyelvű, rituális és szimbolikus bizonyítások), 2) empirikus és 3) deduktív bizonyítások. Az egyes feladatoknál kapott válaszkategóriákat mind megfeleltettük a rangskála egy-egy szintjének. Ezekkel az adatokkal már végezhetők nem-paraméteres statisztikai próbák, sőt, az egyes feladatokat politóm itemeknek tekintve adatainkat egyes eljárásokhoz intervallum-skálás adattá értékelhetjük föl.

A nominális adatok átkódolását öt feladat esetén végeztük el. A következő táblázatban ezen feladatokra adott válaszok relatív gyakoriságát tekinthetjük át.

9. táblázat. Az „ég-e a városháza" feladat ordinális válaszmintázatainak százalékos gyakorisági eloszlása évfolyamonként és iskolatípusonként (%)

			9. osztály		11. osztály	
	5. osztály	7. osztály	gimnázium	szakközépisk.	gimnázium	szakközépisk.
válaszkód	(N=594)	(N=563)	(N=241)	(N=412)	(N=210)	(N=307)
0	2,2	1,8	1,2	4,1	1,0	2,3
1	58,2	55,8	39,8	64,8	31,9	59,9
2	35,2	28,4	9,1	15,0	5,2	10,7
3	4,4	14,0	49,8	16,0	61,9	27,0
összesen	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0

A nominális válaszkategóriák táblázatához képest egy új elemzési lehetőséget jelent, hogy az életkorok és iskolatípusok szerinti különbségeket a bizonyítási képesség szempontjából fontos externális, empirikus és deduktív bizonyítások gyakoriságában mutatkozó különbségekként írhatjuk le. A legszembetűnőbb változások három pontban foglalhatók össze: 1) Az externális bizonyítások aránya a gimnáziumi tanulók körében csökkenést mutat. 2) Az empirikus bizonyítások aránya az iskolában eltöltött idővel fordított arányban nő. 3) A deduktív bizonyításokra a megfelelő nominális kategóriákkal kapcsolatban elmondottak itt is érvényesek, mivel csak egyetlen nominális kategória (a 11-es) került a deduktív bizonyítások közé.

10. táblázat. A „gömbölyű Föld" feladat ordinális válaszmintázatainak százalékos gyakorisági eloszlása évfolyamonként és iskolatípusonként (%)

			9. osztály		11. osztály	
	5. osztály	7. osztály	gimnázium	szakközépisk.	gimnázium	szakközépisk.
válaszkód	(N=327)	(N=284)	(N=117)	(N=207)	(N=110)	(N=156)
0	4,9	6,0	7,7	8,2	6,4	8,3
1	41,3	27,8	22,2	27,5	19,1	28,2
2	46,2	59,5	61,5	59,9	65,5	57,7
3	7,5	6,7	8,5	4,3	9,1	5,8
összesen	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0

A táblázat emlékeztet a modus ponens és modus tollens feladatainak táblázatára: Nem látható lényeges különbség az egyes évfolyamok teljesítménye között. Ez egyrészt azt jelentheti, hogy a modus ponens és modus tollens szabályokhoz hasonlóan már az 5. osztályosok körében is ismert a Föld gömb alakúságának bizonyítása, másrészt meg kell kérdőjelezni annak jogosságát, hogy ebben a feladatban csak az indirekt bizonyítás tartozik a deduktív bizonyítások közé. Mindkét felvetésnek további jelentős következményei vannak. Ha az évfolyamok hasonló válaszgyakoriságainak hátterében valóban hasonló tudás áll, akkor ez a deduktív gondolkodás kutatásának önironikus alapelvéhez hasonlóan arra figyelmeztet bennünket, hogy ez a feladat valójában nem képesség jellegű tudást, hanem előzetes ismereteket mért. Ez a gondolat nagymértékben hozzájárult ahhoz, hogy az előfelmérést követően olyan mérőeszközben kezdtem gondolkodni, amelyben az előzetes ismeretek szerepe csökken, és a bizonyítási stratégiák megítélésére, használatára helyeződik a hangsúly. A második probléma hátterében az a korábban már említett dolog van, hogy univerzális kvantort nem tartalmazó állítások esetében nem könnyű a tanulói válaszból visszakövetkeztetni a bizonyítási folyamat jellegére. Ezt az észrevételt úgy hasznosítottuk a nagymintás mérés során, hogy szerkesztettünk olyan feladatokat is, amelyben csupán az externális és az annál magasabb szintű bizonyítások közötti különbségtételt vizsgáltuk.

11. táblázat. A 3-mal való oszthatóságot vizsgáló feladatok ordinális válaszmintázatainak százalékos gyakorisági eloszlása évfolyamonként (%)

válaszkód	5. osztály (N=594)	7. osztály (N=562)
0	3,5	3,6
1	21,4	16,9
2	66,3	26,9
3	8,8	52,7
összesen	100,0	100,0

Annak ellenére, hogy a két tesztváltozat különböző feladatokat tartalmazott, az átkódolás azonos módon történt. Az egyik feladatban 6332-ről, a másikban 7045-ről kellett megmutatni, hogy nem osztható 3-mal. A két feladat esetében a válaszkategóriák relatív gyakorisága nagyon hasonló, s ez indokolja, hogy közös ordinális kategóriák szerepeljenek. A táblázat alapján ismét levonhattuk azt a következtetést, hogy a nagymintás mérés feladataiban kisebb súlyt kell kapniuk az ismeret jellegű tudáselemeknek, mivel feltehetőleg a 3-mal való oszthatósági szabály ismerete vagy nem ismerete jelentős szerepet játszik az 5. és 7. osztályosok közötti különbségben.

A következő két feladat a 9. és 11. évfolyamosok tesztjeiben szerepelt.

12. táblázat. A „2 az egyetlen páros prímszám" feladat ordinális válaszmintázatainak százalékos gyakorisági eloszlása évfolyamonként és iskolatípusonként (%)

	9. osztály		11. osztály	
válaszkód	gimnázium (N=117)	szakközépiskola (N=207)	gimnázium (N=110)	szakközépiskola (N=156)
0	10,3	11,1	5,5	22,4
1	12,0	22,2	14,5	27,6
2	23,9	36,7	11,8	23,7
3	53,8	30,0	68,2	26,3
összesen	100,0	100,0	100,0	100,0

13. táblázat. A „három páratlan szám szorzata páratlan" feladat ordinális válaszmintázatainak százalékos gyakorisági eloszlása évfolyamonként és iskolatípusonként (%)

	9. osztály		11. osztály	
válaszkód	gimnázium (N=117)	szakközépiskola (N=203)	gimnázium (N=99)	szakközépiskola (N=150)
0	16,2	17,7	13,1	14,0
1	15,4	10,8	25,3	23,3
2	27,4	63,5	24,2	49,3
3	41,0	7,9	37,4	13,3
összesen	100,0	100,0	100,0	100,0

A két táblázat összehasonlításával rögtön beigazolódik, hogy jelentős különbség van a bizonyítási típusokban univerzális kvantort akár implicit módon tartalmazó és azt nem tartalmazó állítások esetén. A páratlan számok szorzására vonatkozó feladaton elért eredmények ráadásul egy olyan fejlődési modellt implikálnak, amelyet az elméleti áttekintés fejezetében már vázoltunk. Az egyes évfolyamok és iskolatípusok szerinti különbségekből kirajzolódni látszott a fejlődési zsákutcának tekinthető empirikus → szimbolikus → deduktív sorrend.

A fejlődés problematikájának egyik megközelítési lehetősége az ordinális adatok évfolyamok szerinti változását kimondó hipotézis tesztelése. Azt hipotézisünket, hogy az évfolyamokkal együtt nő az „ég-e a városháza?" és a „gömbölyű Föld" feladatokon nyújtott teljesítmények középértéke, a Jonckheere-Terpstra-próbával tesztelhetjük. Az azonos évfolyamhoz tartozó gimnazisták és szakközépiskolások teljesítményét ebben az esetben összevontan kezeljük.

14. táblázat. A Jonckheere-Terpstra-próba eredményei a vizsgált két feladatban az évfolyamok szerinti sorrendre vonatkoztatva (forrás: Csíkos, 1999c)

	N	standard J-T	p
„gömbölyű Föld"	1178	2.07	.038
„ég-e a városháza?"	2327	8.01	.000

A p értékek alapján, amelyek mindkét esetben a szokásos szignifikancia-határnak számító 0,05 alatt vannak, a nullhipotézist mindkét feladat esetében el lehet vetni, és az ellenhipotézist lehet kimondani, amely szerint évfolyamok szerint nem-csökkenő tendencia van a tanulói teljesítményekben.

3.1.2. A fejlődési tendenciák jellemzése a feladatok közötti összefüggések alapján

Az alfejezet címe kissé szokatlan társítást emel ki. A feladatok és a feladatok hátterében lévő gondolkodási tevékenységek közötti összefüggések vizsgálata ugyanis általában más jellegű statisztikai elemzéseket igényel, mint a fejlődési tendenciák vizsgálata. Azonban a fejlődés egy lehetséges indikátora lehet egyes változóink kapcsolatainak szorosabbá válása. Ha ugyanis a különböző tartalmú feladatokon elért eredmények közötti korrelációk magasabbak, az a feladatmegoldásban a tartalom szerepének csökkenését, valamint a képesség jellegű és meta-tudáselemek szerepének növekedését jelezheti. Ez a magyarázata annak, hogy a fejlődési tendenciákat a feladatok összefüggéseinek változása alapján vizsgáljuk.

A feladatok összefüggéseinek vizsgálatára a korreláció-számítás az alkalmas módszer. Mivel adataink az átkódolás után is csak rangskálán helyezhetők el, egy nem-paraméteres korrelációszámítási módszert - a Spearman-korrelációt - használtunk.

15. táblázat. Bizonyítási feladatok ordinális változói közötti Spearman-korrelációk 5. osztályban

	ég-e a városháza?	gömbölyű Föld
gömbölyű Föld	0,146 N=305, p=0,011	1,000
3-mal oszthatóság	0,105 N=594, p=0,011	0,100 N=305, p=0,081

16. táblázat. Bizonyítási feladatok ordinális változói közötti Spearman-korrelációk 7. osztályban

	ég-e a városháza?	gömbölyű Föld
gömbölyű Föld	0,102 N=284, p=0,088	1,000
3-mal oszthatóság	0,202 N=562, p=0,000	0,073 N=283, p=0,220

Az 5. és 7. osztályban tapasztalt korrelációs együtthatók alacsonynak nevezhetők, noha közülük több is nagy valószínűséggel szignifikánsan nagyobb 0-nál. Ha ugyanis a korrelációs együtthatókkal kapcsolatban távolabbra tekintünk, mint egyszerűen a szignifikancia meghatározása, akkor a - számszerűleg hasonló nagyságú - Pearson-féle korrelációs együtthatókból számolható determináció együttható nagyságát vizsgálhatjuk. A determinációs együttható a Pearson-féle korrelációs együttható négyzete, és megmutatja két változó egymásra vetített megmagyarázott varianciáját. A táblázatok értékei alapján tehát az egyes változók egymás varianciájának körülbelül 1-4%-át magyarázzák meg. Ilyen alacsony értékek lényegében bármely két kognitív szférára vonatkozó feladat között előfordulhatnak.

17. táblázat. Bizonyítási feladatok ordinális változói közötti Spearman-korrelációk a 9. évfolyam gimnazista részmintáján

	ég-e a városháza?	gömbölyű Föld	2 a legkisebb prím
gömbölyű Föld	0,126 N=117, p=0,176	1,000	-
2 a legkisebb prím	0,377 N=117, p<0,001	0,269 N=117, p=0,003	1,000
3-páratlan szorzata	0,181 N=117, p=0,050	-	-

A cellákban a vízszintes vonal azt jelzi, hogy a feladatok nem szerepeltek közös tesztben, így korrelációt nem lehetett számolni.

18. táblázat. Bizonyítási feladatok ordinális változói közötti Spearman-korrelációk a 9. évfolyam szakközépiskolás részmintáján

	ég-e a városháza?	gömbölyű Föld	2 a legkisebb prím
gömbölyű Föld	0,082 N=207, p=0,242	1,000	-
2 a legkisebb prím	0,226 N=207, p=0,001	0,200 N=207, p=0,004	1,000
3-páratlan szorzata	0,021 N=203, p=0,765	-	-

A cellákban a vízszintes vonal azt jelzi, hogy a feladatok nem szerepeltek közös tesztben, így korrelációt nem lehetett számolni.

A kilencedik évfolyamon tapasztalt együtthatók közül egy van, amit össze lehet hasonlítani az 5. és 7. évfolyamok mutatójával: a „gömbölyű Föld" és az „ég-e a városháza" feladatok korrelációja. A számszerű értékek hasonlóak, ám a kisebb minta-elemszám miatt itt már egyik esetben sem szignifikáns az együttható. A két kilencedikes részminta között sincs jelentős különbség. Jelentősnek akkor nevezzük korrelációs együtthatók közötti különbséget, ha a korrelációs együtthatók különbségének szignifikanciájára vonatkozó statisztikai próba megerősíti a nagy különbség hipotézisét. Ilyen minta-elemszám mellett ez csak 0,4 körüli Pearson-együtthatók közötti különbségnél várható.

19. táblázat. Bizonyítási feladatok ordinális változói közötti Spearman-korrelációk a 11. évfolyam gimnazista részmintáján

	ég-e a városháza?	gömbölyű Föld	2 a legkisebb prím
gömbölyű Föld	0,349 N=110, p<0,001	1,000	-
2 a legkisebb prím	0,336 N=110, p<0,001	0,287 N=110, p=0,002	1,000
3-páratlan szorzata	0,337 N=99, p=0,001	-	-

A cellákban a vízszintes vonal azt jelzi, hogy a feladatok nem szerepeltek közös tesztben, így korrelációt nem lehetett számolni.

20. táblázat. Bizonyítási feladatok ordinális változói közötti Spearman-korrelációk a 11. évfolyam szakközépiskolás részmintáján

	ég-e a városháza?	gömbölyű Föld	2 a legkisebb prím
gömbölyű Föld	0,183 N=156, p=0,022	1,000	-
2 a legkisebb prím	0,097 N=156, p=0,230	0,078 N=156, p=0,333	1,000
3-páratlan szorzata	0,217 N=150, p=0,008	-	-

A cellákban a vízszintes vonal azt jelzi, hogy a feladatok nem szerepeltek közös tesztben, így korrelációt nem lehetett számolni.

A tizenegyedikesek körében tapasztalt korrelációs együtthatók elemzése két érdekes dologra hívja fel a figyelmet. Szembetűnő, hogy a 11. évfolyamos gimnazisták mátrixában a többihez képest magasabb, és minden esetben szignifikáns értékeket találunk, ugyanakkor szakközépiskolások esetében az együtthatók nem mind szignifikánsak.

A korrelációs táblázatok sorozata alapján az egyik fontos megállapításunk az lehet, hogy a 11. évfolyamos gimnazisták csoportjában találjuk a legösszefüggőbb változórendszert. A változórendszer összefüggés-rendszerének jellemzésére alkalmas eszköz lehet a politóm itemekre is alkalmazható Cronbach-α reliabilitás-mutató. A 11. évfolyamos gimnazisták és szakközépiskolások teljesítménye közötti különbségeket három közös itemen vizsgálhatjuk. (A táblázatban szereplők közül a „3 páratlan szám szorzata" feladatot el kellett hagynunk, mert az más tesztváltozatban szerepelt, mint a „2 az egyetlen páros prímszám" és a „gömbölyű Föld" feladatok.) Három item szokatlanul kevés a reliabilitás-vizsgálathoz, és nem várhatók magas értékek. A gimnazisták mintáján a Cronbach-α mutató értéke 0,55 lett, ami a tételek számához viszonyítva magas érték, a szakközépiskolások körében ugyanakkor a Cronbach-α 0,27 lett, ami jóval alacsonyabb érték. Ezek az értékek összevethetők a kilencedikesek megfelelő mutatóival, mivel ugyanazok a feladatok szerepeltek. A 9. évfolyamos gimnazisták mintáján 0,50, míg a szakközépiskolások körében 0,39 lett a Cronbach-α értéke.

A reliabilitás-mutatók elsősorban tesztek jóságának jellemzésére használatosak. Itt is lényegében ezt a feladatot töltik be. A további fejtegetésekhez ugyanakkor kihasználjuk azt a megállapítást, hogy a reliabilitás populáció-függő (ld. pl. *Horváth*, 1990; *Walsh* és *Betz*, 1990). Ez azt jelenti, hogy a reliabilitás-mutatók megmutatják, az adott itemek egy bizonyos korosztályban vagy iskolatípusban mennyire következetesen különítik el egymástól a tanulói teljesítményeket. Mivel a két évfolyam és a két iskolatípus esetén teljesen egyforma itemek voltak, konkrét esetünkben az előző mondat egyenértékű azzal, amelyben a „különítik el" kifejezést „különíthetik el" szókapcsolatra cseréljük. Ez pedig nem jelent mást, mint azt, hogy a bizonyítási képesség mérésére szerkesztett előfelmérésbeli feladataink egyes populációkban jobban, máshol gyengébben fejlett képesség jellegű tudást mérnek. Ha a feladatok validitását megfelelőnek találjuk, akkor az előző gondolatokból az következik, hogy a feladatok összefüggésrendszere alapján a 11. évfolyamos gimnazisták esetében körvonalazódik egy olyan képesség jellegű tudásrendszer, amit a bizonyítási képességgel rokoníthatunk. A szakközépiskolások és az alacsonyabb évfolyamokban tanulók teljesítménye alapján egy kevésbé kialakult képesség jellegű tudásrendszert jeleznek eredményeink.

Amennyiben a feladatok összefüggésrendszerének szorosságát használjuk föl fejlődési tendencia jellemzésére, két nagy problémával szembesülünk:

1. Az összefüggésrendszer csupán azt írja le. hogy mennyire „kompakt" egy képességrendszer. A korábban többször említett minőségi kategóriák, amelyek a bizonyítási sémákra vonatkoznak, nem jelennek meg a modellben. Elképzelhető lenne elvileg, hogy kialakul egy jól körvonalazható képesség jellegű tudásrendszer, ám ez a tudásrendszer csupán tekintélyelvű és empirikus bizonyítások konstruálását teszi lehetővé. A konkrét esetünkben azonban nem ez helyzet: amint a feladatok megoldottsági mutatóiból következik, a jelen esetben az összefüggőbb, megbízhatóbban mérhető képességrendszer egyben fejlettebb is.

2. Eredményeink szerint bizonyítások konstruálásának képessége, amely egy külső kritériumrendszer alapján megbízhatóan mérhető képességet jelent, nagyon késői fejlődési stádiumban jellemző. Gyakorlati tapasztalatunk ugyanakkor azt sugallja, hogy a tanulók már általános iskolában szembesülnek a tekintélyelvű értékelés gyakori értéktelenségével, és az empirikus verifikáció korlátjaival is. A látszólagos ellentmondás úgy oldható föl, ha jelentős időbeli eltolódást tételezünk föl a bizonyítások megértésének és konstruálásának fejlődése között. Az előfelmérés eredményei alapján tehát azt a következtetést vonhattuk le, hogy a nyíltvégű feladatokról nemcsak az objektivitás növelése és az itemszám emelése miatt érdemes áttérni a feleletválasztós feladatok használatára, hanem azért is, mert a bizonyítási képesség

esetében lényegesen más gondolkodási komponenseket mérünk bizonyítások értékességének megállapítása és bizonyítások megszerkesztése esetén.

3.1.3. Összefüggések a tanári bizonyítás-értékelések és a tanulói teljesítmények között

Az előfelméréshez kapcsolódóan kitöltött 56 matematikatanári kérdőív segítségével igyekeztünk rámutatni olyan folyamatokra, amelyek az iskolában befolyásolják a bizonyítási képesség fejlődését. Emellett a tanári kérdőív fontos szerepet játszott a nagymintás mérés tanulói tesztjeinek fejlesztésében is, amint az a következő elemzésekből kiderül.

Az eredmények elemzése szempontjából az első szempontunk az volt, hogy a matematikatanárok értékítélete mennyiben felel meg a *Harel* és *Sowder* (1998) által publikált bizonyítási-sémák hierarchiájának. A kérdés illusztrálásaként tekintsük most a „3 páratlan szám szorzata" feladatot. A 21. táblázatban közöljük a feladathoz tartozó tanulói válaszlehetőségek nominális és ordinális kódjait, majd a tanári értékítélet szerinti sorrendet.

21. táblázat. Bizonyítástípusok sorrendje a matematikatanárok értékítélete alapján a „3 páratlan szám szorzata páratlan" feladatban

nominális kategória	ordinális kategóriák Harel és Sowder rendszere szerint	sorszám az általános iskolai matematikatanárok véleménye szerint	sorszám a középiskolai matematikatanárok véleménye szerint
0	0	-	-
1	1	-	-
2 (egy konkrét példa)	2	6.	6.
3 (több konkrét példa)	2	5.	5.
4 (szimbolikus)	1	2.	3.
5 (formális deduktív)	3	1.	1.
6 (2 páratlan szorzatára)	2	4.	4.
7 (informális deduktív)	3	3.	2.

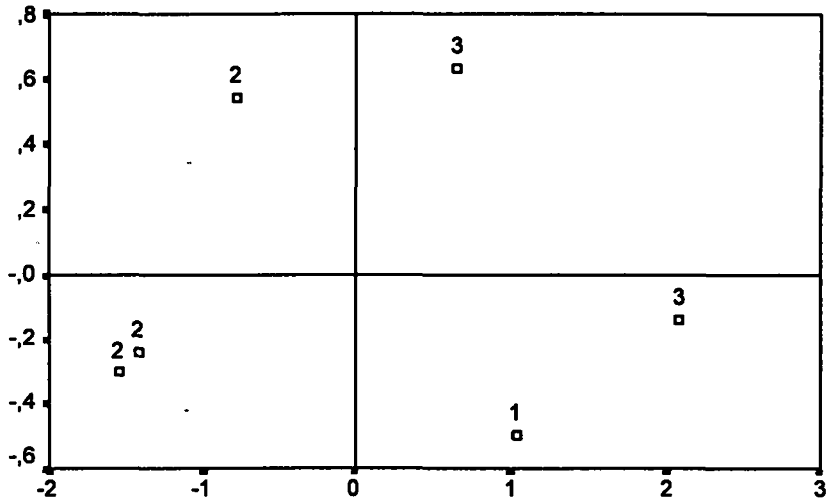
A táblázat elemzése nyilvánvalóvá teszi, hogy a matematikatanári értékítéletek nincsenek összhangban az általunk használt matematikai alapokon létrejött bizonyítási kategóriákkal. Az eltérés egy mondatban úgy foglalható össze, hogy jellemző a szimbolikus bizonyítás túlértékelése és az empirikus bizonyítások alulértékelése (Csíkos, 1999d). Egy matematikainak látszó, ám a matematikai szimbólumokat nem jól kezelő „levezetés" értékesebb a magyar iskolarendszerben, mint az empirikus verifikáció. A jelenség egyik következménye lehet, hogy a tanulók - amennyiben a kontextus alapján úgy érzik, matematikai jellegű bizonyítást várnak tőlük - igyekeznek matematikai szimbólumokat használni.

Az általános és középiskolai matematikatanárok véleménye lényegében megegyezik a bizonyítástípusok értékességét illetően. Kisebb elmozdulás figyelhető meg a középiskolai tanárok körében az informális deduktív bizonyítás javára a szimbolikus bizonyítással szemben. A nagymintás mérés egyik érdekes kutatási kérdése, hogy a tanulók szemében mikor és milyen mértékben csökken a szimbolikus bizonyítások értéke az iskolarendszerben előrehaladva.

Azért ezt a feladatot választottam elemzésre, mert ebben többféle empirikus verifikáció és kétféle deduktív bizonyítás is előfordult. A 21. táblázat adatai alapján nyilvánvaló, hogy túlzott leegyszerűsítés általában empirikus és általában deduktív bizonyításokról beszélni. Mindkét fő kategórián belül számos forma létezhet, amelyek megítélése különböző lehet. Ha azt szeretnénk, hogy egy későbbi mérőeszközben megalapozott legyen állításonként egyetlen „prototípus" (*Tirosh*-i (1999) kifejezéssel élve: paradigmatikus modell) szerepeltetése, akkor valamilyen módon ki kell mutatnunk, hogy az értékítéletben megnyilvánuló rangsor szerinti különbségek mellett van valami közös az egy nagyobb kategóriába tartozó bizonyítási altípusok között.

Ha azt a hipotézist szeretnénk vizsgálni, hogy manifeszt változóink kialakításában több más változó hatása érhető tetten, akkor a látens hatások elkülönítésének egyik eszköze a többdimenziós skálázás lehet. A többdimenziós skálázás alkalmazásakor feltételezzük, hogy a változóink értéke több tényezőre (dimenzióra) vezethető vissza. A „3 páratlan szám szorzata" feladathoz kapcsolódó matematikatanári értékítéletek alapján a hatféle válaszmintát a következő síkon helyezhettük el:

Kétdimenziós euklideszi távolságmodell



magyarázat: Az ábrán feltüntetett számok a háromszintű bizonyításkategóriáknak megfelelőek (1=externális, 2=empirikus, 3=deduktív)

6. ábra. A „3 páratlan szám szorzata" feladathoz kapcsolódó bizonyítások kétdimenziós elhelyezkedése a tanári értékelés alapján

A modellhez tartozó s-stress érték 0,001-nél is kisebb, ami azt jelenti, hogy a modell a kétdimenziós skálázáshoz szükséges minden releváns információt tartalmaz. Az eredmények értelmezésének következő lépése a tengelyek (dimenziók) interpretációja. Látható, hogy a vízszintes tengely szerinti elhelyezkedés követi a kérdőívben adott számadatok átlagát. A modell azonban föltárta a tanári értékítéletek egy másik dimenzióját is, amely a válaszok formalizáltságaként interpretálható. S ami különösen érdekes, hogy a két egymásra vetített dimenzió alapján nem zárható ki, hogy létezik a többféle konkrét empirikus és deduktív bizonyítás mögött egy-egy prototípus, amelyhez tanári értékítélet rendelhető, amely meghatározza az adott típusba tartozó konkrét bizonyítások értékét.

3.1.4. Összefüggések néhány háttérváltozóval

Tekintve, hogy az előfelmérés egy nagyobb kutatás keretei között történt, a mérőeszközök és az adatlap változóival való kapcsolatok elemzésére is lehetőség nyílt. A megszámlálhatatlan lehetőség közül ebben a fejezetben azokat az elemzéseket közöljük, amelyek legnagyobb hatással voltak a mérőeszköz fejlesztésére és a bizonyítási képesség fejlődésével kapcsolatos elméleti koncepciónk alakulására.

Az első háttérváltozó, amelynek szerepét megvizsgáljuk, a matematika osztályzat. Mivel sokak szerint a bizonyítások a matematika lényegét jelentik, a bizonyítási képesség fejlettsége és a matematika osztályzat között szignifikáns pozitív összefüggéseket várhattunk. Láttuk, hogy a matematikai és pszichológiai szempontokat egyaránt figyelembe vevő hierarchikus kategória-rendszerünk és a matematikatanárok értékítélete alapján előálló rendszer között különbségek vannak. Ez alapján megfogalmazható az a kérdés, hogy a matematika osztályzatok melyik kategória-rendszerrel vannak összhangban. A következő táblázatban a „3 páratlan szám szorzata" feladat megoldásmintázatait megfeleltetjük az adott választípust adó tanulók matematika osztályzatainak átlagával, összehasonlításképpen melléhelyezve a matematikatanárok véleménye alapján kirajzolódott értéksorrendet.

22. táblázat. Összefüggések a tanulói bizonyítási sémák, a matematika osztályzat és a matematikatanári értékítélet között

matematika osztályzatok átlaga	nominális kategória	ordinális kategóriák Harel és Sowder rendszere szerint	sorszám az általános iskolai matematikatanárok véleménye szerint	sorszám a középiskolai matematikatanárok véleménye szerint
4.50	5	3	6	6
3.79	4	1	5	4
3.49	7	3	4	5
2.98	6	2	3	3
2.88	1	1	-	-
2.83	0	0	-	-
2.72	2	2	1	1
2.69	3	2	2	2

A táblázat adatai alapján szembetűnő, hogy a szimbolikus bizonyítást adók matematika átlaga magas, és példákkal alátámasztás bizonyítási stratégiáját választók matematika osztályzatának átlaga a legalacsonyabb. Ez a táblázat alátámasztja, hogy a matematika tantárgy, amely a bizonyítási képesség fejlesztésének egyik letéteményese, a tanulókban olyan képet alakíthat ki, hogy a példákkal alátámasztás mint bizonyító stratégia értéktelen. A matematika szempontjából ezt helyénvalónak is nevezhetnénk, ha ugyanakkor nem lenne jelen egy másik tendencia, amely az értelem nélküli szimbólum-manipuláció túlértékelésében áll.

Az előzmények ismeretében nem meglepő, hogy a matematikai tanulmányi éntudat és a bizonyítási típusok között is elgondolkodtató összefüggéseket találtunk (*Józsa* és *Csíkos*, 1999). Eredményeink szerint a „három páratlan szám szorzata páratlan" feladatban azok matematikai tanulmányi éntudata a legalacsonyabb szintű, akik empirikus bizonyítást adtak.

A tanulói teljesítmények elemzése során gyakran figyelmen kívül hagyott tényező a tanulók neme. Természetesen nem azért lényeges a teljesítmények nemek szerinti bontásban történő vizsgálata, mert szeretnénk kimutatni a fiúk vagy a lányok fölényét egy bizonyos területen. A nemek közötti kognitív különbségekkel foglalkozó irodalom valójában arra kíváncsi, hogy melyek azok a területek, amelyeken valamilyen oknál fogva különbség mutatkozik. Az okok sokfélék lehetnek, a legtöbb esetben a társadalmi környezet hatása válik meghatározóvá a nemek szerinti teljesítménykülönbségekben. Az előfelmérés feladatain az ordinális kódokra vonatkozó nem-paraméteres statisztikai próbákat végeztünk.

23. táblázat. A nemek közötti különbségek vizsgálatára végrehajtott Mann-Whitney-próbák eredménye 5. és 7. osztályban

	5. osztály		7. osztály	
feladat	Mann-Whitney U	p	Mann-Whitney U	p
„ég-e a városháza"	39968,0	0,32	33896,5	0,66
„gömbölyű Föld"	10377,5	0,40	8447,5	0,36
„3-mal oszthatóság"	40929,5	0,65	31706,0	0,08

A p értékek alapján minden esetben igen nagy valószínűsége van annak, hogy hibát követnénk el a teljesítmények azonos populációból származását kimondó nullhipotézisek elvetésével, vagyis a lányok és a fiúk teljesítménye az általános iskolai korosztályban teljesen hasonlónak nevezhető. A 24. táblázatban a középiskolás részmintákon vizsgáljuk a nemek szerinti különbségeket.

24. táblázat. A nemek közötti különbségek vizsgálatára végrehajtott Mann-Whitney-próbák eredménye a 9. és 11. évfolyamos gimnáziumi mintán

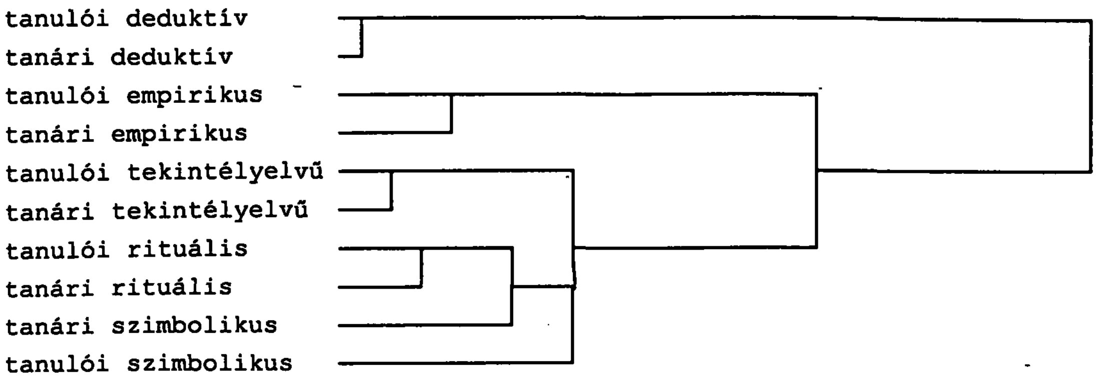
	9. osztály gimnázium		11. osztály gimnázium	
feladat	Mann-Whitney U	p	Mann-Whitney U	p
„ég-e a városháza?	5761,0	0,04	4092,5	0,14
„gömbölyű Föld"	1522,0	0,89	1183,5	0,88
„2 az egyetlen páros prím"	1520,0	0,88	1054,0	0,20
„3 páratlan szám szorzata"	1418,5	0,24	912,5	0,25

A táblázatban egyetlen esetben találunk szignifikáns különbséget, a 9. évfolyamosok „ég-e a városháza?" feladatában. A konkrét válaszmegoszlások arra engednek következtetni, hogy a különbség a szociális alapú válaszok gyakoriságára vezethető vissza. Vagyis újólag igazolva láthatjuk azt, amire *Gilligan* (1982/1999) is felhívta a figyelmet a kohlbergi erkölcsfejlődési elmélet kritikája kapcsán: a lányok gyengébb teljesítménye sokszor a szociális érzékenységüknek köszönhető, ami ugyanakkor sok kontextusban komoly értéket jelent.

3.1.5. Mit gondolnak a tanulók a bizonyítások tanári megítéléséről?

Kutatásmódszertani szempontból az előméréshez csatlakozóan, az időrendet figyelembe véve egy-két héttel a nagymintás mérések megkezdése előtt került sor egy kismintás felmérésre, amelyben a bizonyítási képesség tesztjeinek véglegesnek hitt változatait szerepeltettük. A Szatymazi Általános Iskola egyik osztályában bemért tesztben a valódi végleges változathoz képest az volt a jelentős különbség, hogy a tanuló osztályzatának oszlopa mellett szerepelt még egy, „Szerinted ilyen lenne tanárod osztályzata" felirattal. Kíváncsiak voltunk arra, hogy vajon milyen mértékben lesz különbség a tanuló saját és a tanárának vélt osztályzatai között; függ-e majd a különbség a tartalmi területtől, a bizonyítási sémától stb.

A 7. ábrán bemutatjuk, hogy „a 2 az egyetlen páros prímszám" feladatban hogyan alakult a tanulói és tanári értékítéletek összefüggésrendszere.



Megjegyzés: az a) szimbolikus, a b) empirikus, a c) deduktív, a d) tekintélyelvű, az e) rituális bizonyítás volt,

7. ábra. A tanulói és a vélt tanári osztályzatok összefüggései az euklideszi távolságon alapuló legközelebbi szomszéd módszerével végrehajtott klaszteranalízis eredményeként („a 2 az egyetlen páros prímszám" feladat alapján)

A fagráfról leolvasható, hogy minden egyes opciónál a tanulói és a vélt tanári értékítélet nagyon szorosan együtt változott. Mivel minden feladat esetén hasonló ábrát kaptunk, arra következtethetünk, hogy mindenféle bizonyítástípus tanulói megítélése nagymértékben attól függ, hogy a tanuló szerint tanára(i) mit tart(anak) értékes, illetve kevésbé értékes típusnak. A konkrét számadatok ismeretében az is megállapítható, hogy a tanulók a saját osztályzataikat inkább magasabbra, mintsem alacsonyabbra állították, mint tanáraikét. Ahogy azonban a klaszteranalízis bizonyítja (stílszerűen szólva: empirikusan verifikálja), az eltérések következetesek voltak. Az is kiderült a tesztírás utáni megbeszélésen, hogy voltak, akik nem is értették, miért van két oszlop, hiszen olyan természetesnek vették, hogy a bizonyításokra adott osztályzatok megállapításánál az az irányadó, hogy a tanár milyen jegyet adna.

Érdemes megfigyelni a klaszteranalízis dendrogramján, hogy a bizonyítástípusok kapcsolódási sorrendje teljesen összhangban van az elméleti áttekintés fejezetében leírt modellünkkel. Először a három externális séma, a tekintélyelvű, rituális és szimbolikus bizonyítások kapcsolódnak össze, majd a következő lépésekben ezekhez az empirikus, végül a deduktív bizonyítás kapcsolódik.

A szatymazi kismintás mérés eredményeképpen elhagytuk azt az oszlopot a tesztből, amely tanári osztályzatok megítélését kérte. Egy másik fontos konzekvencia az elmélet számára fontos: A bizonyítási képességnek azok a komponensei, amelyek konkrét tesztelési helyzetben bizonyítások értékességének megállapításáért felelősek, egy kívülről adaptált modellt vesznek alapul. A modell szó használata itt nem véletlen, mert utalni kívánok a metakogníció Nelson-Narens-modelljére (ld. 2. ábra), amely szerint a gondolkodás meta-komponensei is magukban foglalnak ismeret jellegű tudáselemeket (modelleket). amelyek a tárgyszintű komponensek irányításának alapjául szolgálnak. Nagy valószínűséggel állíthatjuk, hogy a bizonyítási képesség esetében a meta-komponensek (vagy más kifejezéssel: a stratégia-szint komponensei) az iskolai életből vett modelleket használnak fel bizonyítások értékességének meghatározására.

3.2. A nagymintás mérés eredményei

3.2.1. A tesztek reliabilitása

A kutatásmódszertani fejezetben leírtak alapján a az ötfokú skálán megjelölt értékek nem egy ötértékű politóm itemre kapott részpontszámot jelentenek. Tesztjeink első közelítésben inkább a Likert-skálás, attitűd mérésére hivatott kérdőívekkel mutatnak rokonságot. Mivel azonban formálisan a Likert-skálás mérőeszközök itemei is tekinthetők politóm itemnek, nincs akadálya annak, hogy reliabilitást számoljunk.

Politóm itemek esetén a Cronbach-α mutató a legáltalánosabban elterjedt, amely a Kuder-Richardson-féle (*Nagy*, 1975, szerint a tudásszintmérők számára leginkább használatos) 20-as mutató általánosításának tekinthető (*Horváth*, 1990). A reliabilitás becsléséhez a „Bizonyítási feladatok" teszt formai szempontból azonos 20 iteméhez hozzávesszük a „Gondolkodtató feladatok" 10 hasonló itemét. Az így kapott 30 azonos típusú itemet a bizonyítási képesség egy tesztjének tekintjük.

A 30 itemes teszten és a 20 itemes részteszten az egyes mintákra kapott reliabilitás-értékeket a 25. táblázat foglalja össze:

25. táblázat. Reliabilitás-értékek az egyes részmintákon a 30 itemes teszten, illetve a 20 itemes részteszten

	30 itemes teszt	20 itemes részteszt
teljes minta	0,80	0,76
7. évfolyam	0,72	0,67
9. évfolyam	0,76	0,71
11. évfolyam	0,75	0,72

Ismeretes, hogy a reliabilitás nem csupán a teszt jóságát fejezi ki, hanem annak a populációnak a heterogenitását is, amelyből a minta származik. Nem véletlen ezért, hogy a teljes mintán megbízhatóbban mér a teszt, mint az egyes részmintákon. Azt is tudjuk, hogy a hosszabb tesztnek jobb a reliabilitása. Pontosabban szólva, ha a tesztet hosszát növeljük ugyanazt és ugyanolyan módon mérő feladatokkal, akkor a reliabilitás nő (*Horváth*, 1993). Például egy 0,75-ös reliabilitású, 30 itemes teszt a hosszának megduplázásával 0,86-os reliabilitású lesz. A fenti értékek a reliabilitás-mutató számszerű nagyságát tekintve eleget tesznek a képességtesztekkel szemben támasztott követelményeknek(ld. *Walsh* és *Betz*, 1990).

Mit fejez ki a reliabilitás-mutató a bizonyítási képesség tesztje esetében? A reliabilitás-mutatók általában azt fejezik ki, hogy a teszt a mért tulajdonság szempontjából mennyire következetesen képes elkülöníteni egymástól az átlagos alatti és az átlag feletti teljesítményeket. A Cronbach-α mutató ezen belül egy olyan reliabilitás-becslő módszer, amely az itemek egymás közötti korrelációiból képez mutatót. Ha az α értéke megfelelő, az úgy interpretálható, hogy a teszt itemeire adott értékek konzisztensek, vagyis az itemek lényegében ugyanannak a pszichikus struktúrának működését mérik. A konkrét esetben azt mondhatjuk, hogy a bizonyítástípusok osztályozása során nyert adataink belső konzisztenciát mutatnak. Mivel a bizonyítástípusok értékelése a bizonyítási képesség egy igen fontos komponensének tekinthető, a kielégítő nagyságú α érték azt mutatja, hogy a teszt megfelelően mér valamit, aminek köze lehet a bizonyítási képességhez.

Az itemek összefüggésrendszerének jellemzésére a reliabilitás-vizsgálattal rokon eljárás a Kaiser-Meyer-Olkin-mutató kiszámítása. A KMO-mutató elsősorban egy változórendszer faktoranalízisre való alkalmasságát mutatja, ám mivel azt fejezi ki, hogy az item-interkorrelációk rendszerében a parciális korrelációs együtthatók elegendően kicsik-e, a mérőeszköz jósága egyik indikátorának tekinthetjük. A kicsiny parciális korrelációs együtthatók azt jelzik, hogy a változók egymás közötti összefüggéseinek rendszerében elenyésző szerepe van annak, hogy valamelyik változó közvetítésével mesterségesen szoros kapcsolatok jöhetnek létre. A konkrét esetünkben a KMO-mutató értékei:

26. táblázat. A Kaiser-Meyer-Olkin-mutató értékei az egyes részmintákon

	30 itemes teszt
teljes minta	0,90
7. évfolyam	0,76
9. évfolyam	0,83
11. évfolyam	0,84

A kapott értékek azt jelzik, hogy az egyes bizonyítástípusok megítélése egymástól csaknem teljesen függetlenül történt. A 7. évfolyamosok esetében tapasztalt alacsonyabb érték összefüggésben lehet azzal, hogy az általános iskolások gyakrabban osztályoztak úgy, hogy mind az öt lehetséges értéket felhasználták, és így óhatatlanul egymástól is függővé tették az egyes opciókra adott pontszámokat.

3.2.2. A „Bizonyítási feladatok"-ban nyújtott tanulói teljesítmények jellemzése

A bizonyítási képesség mérésére szolgáló első tesztben matematikai állítások és azokhoz kapcsolódó öt-öt bizonyítás szerepeltek. Az eredmények ismertetése során az egyes opciókra kapott számértékeket intervallum-skálán lévőnek tekintettük, így az előfelméréshez képest az alapvető statisztikai jellemzők közül a gyakorisági eloszlások vizsgálatát az átlag és szórás közlésével helyettesítjük. Az áttekinthetőség kedvéért az itemek sorrendje minden feladatban ugyanaz lesz a táblázatban: tekintélyelvű, rituális, szimbolikus, empirikus és deduktív bizonyítások követik majd egymást.

A 27. táblázat adatainak elemzése első közelítésben a vastaggal jelölt átlagértékek évfolyam és bizonyítástípus szerinti változási tendenciáira irányul. A táblázat nagy mérete azt indokolja, hogy néhány fontos megállapítást a táblázatból kivágott részletekkel illusztráljunk.

Elöljáróban azt vizsgáljuk meg, nem lehetséges-e, hogy a bizonyítástípusok szerint az átlagokban kirajzolódó tendencia csupán kutatásmódszertani műtermék. Két dolog is van, ami rendkívüli óvatosságra int a következtetések levonásakor: 1) Lehetséges, hogy nagyon sok tanuló számára a bizonyítások értékelése azt jelentette, hogy megkereste a legjobb válaszlehetőséget, azt négyesre, de gyakrabban ötösre értékelte, a többi „rossz" bizonyítás között pedig kiosztotta az alacsonyabb pontszámokat. Ha igaz lenne ez a feltételezés, az elégséges magyarázatot nyújtana arra, hogy a deduktív bizonyítások esetében más életkori tendencia rajzolódik ki az adatokból, mint a többi négy típusnál. 2) A hetedikesek még nem tudják igazából, hogy az iskolában hogyan szokás ötfokozatú skálán osztályozni, ezért értékítéletük kifejeződése bizonytalan. Ez elégséges magyarázat lenne arra, hogy a hetedikesek a deduktív bizonyítások relatíve alul-, a többi bizonyítástípust relatíve felülértékelik.

Az előbbiekben említett két tényezővel valóban számolnunk kellett az eredmények interpretációja során. Az első felvetés által jellemzett stratégia - mint később a szóbeli interjúk során kiderült - több esetben is alapvető tesztmegoldási módszer volt. Ez a tény azért is nagyon fontos, mert alapot jelent a bizonyítási képesség fejlettségét számszerűen jellemző mutató kidolgozásához. Azonban ha igaz is lenne a legtöbb tanulóra, hogy először megkereste a legjobb bizonyítást, és a többi az alacsonyabb pontszámokat kapta, ez a felvetés nem ad magyarázatot a többi bizonyítási típus értékelésében megjelenő és következetesen megnyilvánuló különbségekre.

Az alacsonyabb életkorral együtt járó értékelési bizonytalansággal kapcsolatban azt a kérdést érdemes megfontolni, hogy vajon milyen empirikus mutató jellemezheti ezt a bizonytalanságot. Ha ugyanis tényleg arról lenne szó, hogy a hetedikesek nem olyan következetesek az osztályozásban, mint felsőbb évfolyamos társaik, akkor ennek a nagyobb szórásértékekben kellene megnyilvánulnia. Egy másik fölfogás szerint - éppen ellenkezőleg - a bizonytalanságot az jelezheti, hogy a hetedikesek kevesebb egyes és ötös osztályzatot adnak, a véleményük kevésbé polarizált, ez pedig alacsonyabb szórásértékekkel jár együtt. Az adatok azt az elképzelést támasztják alá, hogy a legtöbb bizonyítás-értékelésénél a hetedikesek szórás-mutatója nagyobb. Említettük ugyanakkor korábban, hogy a hetedikesek populációja heterogénebb a középiskolás populációknál, így nem tudható, hogy a magasabb szórás mögött kialakulatlanabb értékítélet, bizonytalanabb osztályozás vagy a populáció heterogenitása áll. Véleményünk szerint mindhárom tényezőnek szerepe van a magasabb szórásértékek kialakulásában.

A táblázat adatai alapján levonható következtetéseket két csoportra bontjuk: először az egyes bizonyítástípusok adatainak feladatok és idősor szerinti elemzését végezzük el, majd az egyes évfolyamok eredményeit vizsgáljuk. A két szempont egymásra vetítésével megfogalmazunk majd olyan észrevételeket is, amelyeket részben a disszertáció későbbi fejezeteiben, részben későbbi kutatásokban támaszthatunk alá empirikus adatokkal.

27. táblázat. A „Bizonyítási feladatok" teszt feladataira adott válaszok átlaga és szórása

tesztitem	7. osztály	9. osztály gimnázium	9. osztály szakközépisk.	11. osztály gimnázium	11. osztály szakközépisk.
„A 2 az egyetlen páros prímszám"					
tekintélyelvű	**átlag: 2,70** szórás: 1,31	**átlag: 1,69** szórás: 1,00	**átlag: 1,94** szórás: 1,16	**átlag: 1,56** szórás: 0,88	**átlag: 1,75** szórás: 0,94
rituális	**átlag: 2,98** szórás: 1,35	**átlag: 2,55** szórás: 1,24	**átlag: 2,75** szórás: 1,26	**átlag: 2,49** szórás: 1,16	**átlag: 2,59** szórás: 1,26
szimbolikus	**átlag: 3,31** szórás: 1,23	**átlag: 2,56** szórás: 1,26	**átlag: 3,04** szórás: 1,28	**átlag: 2,36** szórás: 1,25	**átlag: 2,51** szórás: 1,21
empirikus	**átlag: 3,66** szórás: 1,17	**átlag: 3,16** szórás: 1,19	**átlag: 3,45** szórás: 1,10	**átlag: 3,24** szórás: 1,16	**átlag: 3,28** szórás: 1,16
deduktív	**átlag: 4,18** szórás: 1,11	**átlag: 4,56** szórás: 0,84	**átlag: 4,29** szórás: 0,96	**átlag: 4,63** szórás: 0,74	**átlag: 4,27** szórás: 1,03
„A háromszög belső szögeinek összege 180°"					
tekintélyelvű	**átlag: 2,23** szórás: 1,33	**átlag: 1,26** szórás: 0,74	**átlag: 1,59** szórás: 1,10	**átlag: 1,32** szórás: 0,85	**átlag: 1,50** szórás: 1,06
rituális	**átlag: 3,14** szórás: 1,32	**átlag: 2,02** szórás: 1,05	**átlag: 2,46** szórás: 1,13	**átlag: 1,83** szórás: 0,96	**átlag: 2,17** szórás: 1,14
szimbolikus	**átlag: 3,67** szórás: 1,10	**átlag: 2,96** szórás: 1,22	**átlag: 3,26** szórás: 1,13	**átlag: 2,78** szórás: 1,15	**átlag: 3,06** szórás: 1,15
empirikus	**átlag: 3,87** szórás: 1,19	**átlag: 3,27** szórás: 1,15	**átlag: 3,13** szórás: 1,22	**átlag: 2,22** szórás: 1,01	**átlag: 2,72** szórás: 1,22
deduktív	**átlag: 4,07** szórás: 1,05	**átlag: 4,77** szórás: 0,62	**átlag: 4,23** szórás: 1,05	**átlag: 4,77** szórás: 0,72	**átlag: 4,38** szórás: 0,95
„Három páratlan szám szorzata mindig páratlan"					
tekintélyelvű	**átlag: 2,82** szórás: 1,43	**átlag: 1,57** szórás: 1,03	**átlag: 2,08** szórás: 1,18	**átlag: 1,57** szórás: 0,96	**átlag: 1,96** szórás: 1,17
rituális	**átlag: 3,56** szórás: 1,16	**átlag: 2,78** szórás: 1,17	**átlag: 3,07** szórás: 1,13	**átlag: 2,70** szórás: 1,15	**átlag: 2,83** szórás: 1,12
szimbolikus	**átlag: 3,12** szórás: 1,30	**átlag: 3,20** szórás: 1,39	**átlag: 3,13** szórás: 1,22	**átlag: 3,58** szórás: 1,40	**átlag: 3,03** szórás: 1,38
empirikus	**átlag: 4,05** szórás: 1,09	**átlag: 2,81** szórás: 1,25	**átlag: 3,46** szórás: 1,13	**átlag: 2,64** szórás: 1,12	**átlag: 3,15** szórás: 1,17
deduktív	**átlag: 4,01** szórás: 1,02	**átlag: 4,11** szórás: 1,13	**átlag: 3,90** szórás: 1,16	**átlag: 4,08** szórás: 1,16	**átlag: 3,75** szórás: 1,18
„Az olyan számok, amelyek 9362... számjegyekkel kezdődnek, és utána csupa 0 áll, nem oszthatók 3-mal"					
tekintélyelvű	**átlag: 1,96** szórás: 1,26	**átlag: 1,25** szórás: 0,62	**átlag: 1,56** szórás: 0,99	**átlag: 1,25** szórás: 0,70	**átlag: 1,51** szórás: 0,90
rituális	**átlag: 3,15** szórás: 1,14	**átlag: 2,20** szórás: 1,12	**átlag: 2,46** szórás: 1,11	**átlag: 2,11** szórás: 1,04	**átlag: 2,23** szórás: 1,12
szimbolikus	**átlag: 3,15** szórás: 1,16	**átlag: 2,66** szórás: 1,22	**átlag: 2,67** szórás: 1,18	**átlag: 2,45** szórás: 1,17	**átlag: 2,57** szórás: 1,15
empirikus	**átlag: 3,20** szórás: 1,25	**átlag: 2,35** szórás: 1,09	**átlag: 2,45** szórás: 1,23	**átlag: 2,21** szórás: 1,08	**átlag: 2,50** szórás: 1,19
deduktív	**átlag: 4,05** szórás: 1,20	**átlag: 4,08** szórás: 1,39	**átlag: 3,90** szórás: 1,35	**átlag: 3,97** szórás: 1,35	**átlag: 3,79** szórás: 1,44

Megjegyzés: A mintaelemszámok, amelyekből az adatokat számítottuk, az egyes évfolyamokon a következőképpen alakultak: 7. osztály: 314-321 fő, 9. gimn.: 337-342 fő, 9. szki.: 259-263 fő, 11. gimn.: 336-340 fő, 11. szki.: 266-269 fő.

A tekintélyelvű bizonyítások

A 28 táblázat a 27. táblázat sorainak kivonatolásával készült, és csak a tekintélyelvű bizonyításokra vonatkozó adatokat tartalmazza. Nyilvánvaló az adatokból, hogy - bár igyekeztünk tartalmi szempontból változatos tekintélyelvű bizonyításokat szerkeszteni - a tanulók következetesen alacsony pontszámokat adtak azokra. A két utolsó feladat tekintélyelvű bizonyításai közötti különbség eléggé jelentősnek tűnik. Ennek oka az lehet, hogy a „3 páratlan szám szorzata páratlan" feladatban a tekintélyelvű bizonyítás már-már empirikusnak tekinthető, hiszen konkrétan utal arra, hogy néhány esetet meg kellene vizsgálni az állítás igazságának igazolása céljából. Az első feladat tekintélyelvű bizonyítása szintén viszonylag magas pontszámokat kapott, ám ennek magyarázatát nem találtam.

28. táblázat. A tekintélyelvű bizonyítási opciókra kapott átlag- és szórásértékek

	7. osztály	9. osztály		11. osztály	
feladat		gimnázium	szakközépisk.	gimnázium	szakközépisk.
„a 2 az egyetlen páros prím"	átlag: 2,70 szórás: 1,31	átlag: 1,69 szórás: 1,00	átlag: 1,94 szórás: 1,16	átlag: 1,56 szórás: 0,88	átlag: 1,75 szórás: 0,94
„a háromszög belső szögeinek összege"	átlag: 2,23 szórás: 1,33	átlag: 1,26 szórás: 0,74	átlag: 1,59 szórás: 1,10	átlag: 1,32 szórás: 0,85	átlag: 1,50 szórás: 1,06
„három páratlan szám szorzata"	átlag: 2,82 szórás: 1,43	átlag: 1,57 szórás: 1,03	átlag: 2,08 szórás: 1,18	átlag: 1,57 szórás: 0,96	átlag: 1,96 szórás: 1,17
„3-mal oszthatóság"	átlag: 1,96 szórás: 1,26	átlag: 1,25 szórás: 0,62	átlag: 1,56 szórás: 0,99	átlag: 1,25 szórás: 0,70	átlag: 1,51 szórás: 0,90

Az elvégzett páros t-próbák kevés kivétellel szignifikáns különbséget jeleztek adott évfolyamon belül a különböző tartalmú bizonyítások átlagértékei között. Ilyen mintaelemszám esetén nagyjából 0,15 századnyi különbség már 95%-os szinten szignifikáns. A tartalom szerint meglévő szignifikáns különbségeket kétféleképpen lehet interpretálni: 1) A tartalomnak meghatározó szerepe van abban, hogy a tanulók mennyire értékesnek ítélik a tekintélyelvi érvelést. 2) A tesztkészítő - legjobb igyekezete ellenére - egyszer „tekintélyibb", másszor kevésbé „tekintélyi" bizonyításokat szerkesztett. Az adatok és a konkrét opciók ismeretében azt mondhatjuk, mindkét tényező szerepe elvitathatatlan. Az első esetben a különbséget az magyarázza, hogy az iskolai törzsanyaghoz képest újszerű, szokatlan állítások esetében elfogadottabb a tekintélyi érvelés, míg a másik tényező hatását az magyarázza, hogy esetenként más bizonyítássémák elemei is beépülhettek a tekintélyelvű bizonyításokba, és ezáltal azok értékesebbé váltak. A két hatótényező közötti jelentős különbség abban áll, hogy míg a tesztkészítő tevékenységében fellelhető hibák mindig konkrét feladatokhoz, opciókhoz köthetők, addig a tartalom ismertsége és a tekintélyelvű érvelés értékessége közötti összefüggés tartalmak széles körében érvényes lehet.

Az évfolyamok, iskolatípusok szerinti különbségek világos tendenciákat rajzolnak ki. A tekintélyelvű bizonyítások a 7. osztályosok körében a leginkább elfogadottak, a gimnazisták esetében pedig alacsonyabb átlagokat találtunk, mint a szakközépiskolások között. A minták közötti átlagbeli különbségek matematikai statisztikai vizsgálatára szolgáló variancia-analízis a szórások különbözősége miatt nem végezhető el, de a Dunnett-féle post-hoc analízis szerint az imént vázolt tendenciát statisztikai szempontból releváns különbségek támasztják alá.

A rituális bizonyítások

Az előfelmérés során a rituális bizonyítások nyíltvégű kérdések esetén ritkán fordultak elő a tanulói válaszok között. A rituális bizonyítási stratégia a tekintélyelvi meghaladását jelenti abban az értelemben, hogy ebben már jelen van a formai megfelelőségre törekvés is. A rituális bizonyítást magasra értékelő személy általában azt értékeli, hogy a bizonyítás „szókincse", szerkezete emlékeztet a deduktív bizonyításokéra. Valószínűsíthető, hogy sok esetben a tárgyi tudás hiánya akadályozza meg a tanulót abban, hogy a rituális bizonyításra alacsony pontszámot „merjen" adni. Feltételeztük ezért, hogy a rituális bizonyítások értékelése során nagy szerepe van a tartalom ismertségének.

29. táblázat. A rituális bizonyítási opciókra kapott átlag- és szórásértékek

	7. osztály	9. osztály		11. osztály	
feladat		gimnázium	szakközépisk.	gimnázium	szakközépisk.
„a 2 az egyetlen páros prím"	átlag: 2,98 szórás: 1,35	átlag: 2,55 szórás: 1,24	átlag: 2,75 szórás: 1,26	átlag: 2,49 szórás: 1,16	átlag: 2,59 szórás: 1,26
„a háromszög belső szögeinek összege"	átlag: 3,14 szórás: 1,32	átlag: 2,02 szórás: 1,05	átlag: 2,46 szórás: 1,13	átlag: 1,83 szórás: 0,96	átlag: 2,17 szórás: 1,14
„három páratlan szám szorzata"	átlag: 3,56 szórás: 1,16	átlag: 2,78 szórás: 1,17	átlag: 3,07 szórás: 1,13	átlag: 2,70 szórás: 1,15	átlag: 2,83 szórás: 1,12
„3-mal oszthatóság"	átlag: 3,15 szórás: 1,14	átlag: 2,20 szórás: 1,12	átlag: 2,46 szórás: 1,11	átlag: 2,11 szórás: 1,04	átlag: 2,23 szórás: 1,12

A 3. feladat viszonylag magasabb átlaga ismét annak köszönhető, hogy a rituális bizonyításopcióban empirikus, sőt deduktív bizonyításokra jellemző elemek is helyet kaptak (konkrét eset vizsgálata, utalás teljes indukcióra). A tekintélyelvű bizonyításoknál megfigyelt másik jelenséget - az állítás ismertsége és a bizonyítástípus értékessége közötti összefüggés - nem tapasztaltuk a rituális bizonyításoknál.

Az iskolai évfolyam és iskolatípus szerinti különbségekről ugyanazokat mondhatjuk el, mint a tekintélyelvű bizonyításokkal kapcsolatban: Leginkább az általános iskolások adtak magasabb osztályzatot, a szakközépiskolások már alacsonyabbakat, és a gimnazisták ítélték meg legszigorúbban ezeket a bizonyításokat. A gimnazista korosztályok közötti különbség csak a háromszöges feladatban szignifikáns, a két szakközépiskolai korosztály között viszont az első kivételével minden feladatban szignifikáns különbséget találtunk. Az öt vizsgált bizonyítástípus közül a deduktív mellett a rituális bizonyításokban volt a legkisebb különbség a gimnazisták és a szakközépiskolások között.

A szimbolikus bizonyítások

A bizonyítási képesség vizsgálatának egyik alapkérdése, hogy a bizonyítás-fogalom milyen mértékben kötődik a matematikához, a matematikai állításokhoz. A kötődés egyik mércéje lehet, hogy az értelmetlen szimbólum-manipuláció mennyire hasonló megítélés alá esik matematikai és nem-matematikai tartalmak esetén.

30. táblázat. A szimbolikus bizonyítási opciókra kapott átlag- és szórásértékek

feladat	7. osztály	9. osztály gimnázium	9. osztály szakközépisk.	11. osztály gimnázium	11. osztály szakközépisk.
„a 2 az egyetlen páros prím"	átlag: 3,31 szórás: 1,23	átlag: 2,56 szórás: 1,26	átlag: 3,04 szórás: 1,28	átlag: 2,36 szórás: 1,25	átlag: 2,51 szórás: 1,21
„a háromszög belső szögeinek összege"	átlag: 3,67 szórás: 1,10	átlag: 2,96 szórás: 1,22	átlag: 3,26 szórás: 1,13	átlag: 2,78 szórás: 1,15	átlag: 3,06 szórás: 1,15
„három páratlan szám szorzata"	átlag: 3,12 szórás: 1,30	átlag: 3,20 szórás: 1,39	átlag: 3,13 szórás: 1,22	átlag: 3,58 szórás: 1,40	átlag: 3,03 szórás: 1,38
„3-mal oszthatóság"	átlag: 3,15 szórás: 1,16	átlag: 2,66 szórás: 1,22	átlag: 2,67 szórás: 1,18	átlag: 2,45 szórás: 1,17	átlag: 2,57 szórás: 1,15

A szimbolikus bizonyítások tanulói értékelése során minden bizonnyal több szempont is érvényesült. Valószínűleg jelen volt a szimbólum-manipuláció mint általános matematikai bizonyítási stratégiával kapcsolatos tudás. Másrészt nyilvánvalóan szerepe volt a tárgyi tudásnak is, harmadsorban pedig ki kell emelnünk az affektív szféra különös fontosságát. A matematikai jelek világával szembeni ellenérzések, vagy éppen a matematikai levezetések átnézésre való hajlandóság mind-mind meghatározhatták, hogy végül milyen osztályzatot adott a tanuló a szimbolikus bizonyításra. A „3 páratlan szám szorzata" feladatban különösen nehéz volt észrevenni, hogy a formális számítások eredményeként adódó algebrai kifejezésből levont következtetés nem korrekt. A többi feladatnál az előző két externális bizonyítástípushoz hasonló tendenciákat fedezhetünk fel a számsorokban. Nyilvánvaló különbség ugyanakkor, hogy a tekintélyelvű és rituális bizonyításokhoz képest az átlagok a legtöbb esetben magasabbak Mivel mindhárom externális bizonyítástípusra matematikai szempontból az jellemző, hogy nem visz közelebb az állítás nyilvánvalóvá tételéhez, a szimbolikus bizonyítások fölényét annak tulajdonítjuk, hogy matematikai kontextusban a matematikai jelek megjelenése a tanulók számára értékesebbé teszi azt.

Az empirikus bizonyítások

31. táblázat. Az empirikus bizonyítási opciókra kapott átlag- és szórásértékek

feladat	7. osztály	9. osztály gimnázium	9. osztály szakközépisk.	11. osztály gimnázium	11. osztály szakközépisk.
„a 2 az egyetlen páros prím"	átlag: 3,66 szórás: 1,17	átlag: 3,16 szórás: 1,19	átlag: 3,45 szórás: 1,10	átlag: 3,24 szórás: 1,16	átlag: 3,28 szórás: 1,16
„a háromszög belső szögeinek összege"	átlag: 3,87 szórás: 1,19	átlag: 3,27 szórás: 1,15	átlag: 3,13 szórás: 1,22	átlag: 2,22 szórás: 1,01	átlag: 2,72 szórás: 1,22
„három páratlan szám szorzata"	átlag: 4,05 szórás: 1,09	átlag: 2,81 szórás: 1,25	átlag: 3,46 szórás: 1,13	átlag: 2,64 szórás: 1,12	átlag: 3,15 szórás: 1,17
„3-mal oszthatóság"	átlag: 3,20 szórás: 1,25	átlag: 2,35 szórás: 1,09	átlag: 2,45 szórás: 1,23	átlag: 2,21 szórás: 1,08	átlag: 2,50 szórás: 1,19

A legváltozatosabb tanulói véleményeket az empirikus bizonyításokkal kapcsolatban találtuk. Korábban már említettük, hogy az empirikus bizonyítások szempontjából jelentős különbség van az univerzális kvantort tartalmazó és azt nem tartalmazó állítások között. Ugyancsak különbség adódhat a *balacheff*-i értelemben különböző empirikus bizonyítások megítélése között. Az empirikus szint *Harel* és *Sowder* rendszerében is több alszintre tagolódik, de sok típus geometriai tartalmakhoz kötődik. Éppen ezért az empirikus bizonyításoknál nem várhattuk a átlagok megegyezését különböző tartalmak esetén. Ami viszont a fejlődési modellünk szempontjából lényeges és a későbbiekben vizsgált kérdés, hogy milyen a szimbolikus és empirikus bizonyítások viszonya.

A deduktív bizonyítások

Valószínűleg nagyon sok tanuló esetében a bizonyítások értékelésének stratégiája magában foglalta a legjobb bizonyítás megkeresésének fázisát. A deduktív bizonyítások fölismeréséhez ugyanakkor - legnagyobbrészt a rituális és szimbolikus bizonyítások jelenléte miatt - szükség volt az adott témakörhöz kapcsolódó ismeret jellegű tudáselemekre is.

32. táblázat. A deduktív bizonyítási opciókra kapott átlag- és szórásértékek

	7. osztály	9. osztály		11. osztály	
feladat		gimnázium	szakközépisk.	gimnázium	szakközépisk.
„a 2 az egyetlen páros prím"	átlag: 4,18 szórás: 1,11	átlag: 4,56 szórás: 0,84	átlag: 4,29 szórás: 0,96	átlag: 4,63 szórás: 0,74	átlag: 4,27 szórás: 1,03
„a háromszög belső szögeinek összege"	átlag: 4,07 szórás: 1,05	átlag: 4,77 szórás: 0,62	átlag: 4,23 szórás: 1,05	átlag: 4,77 szórás: 0,72	átlag: 4,38 szórás: 0,95
„három páratlan szám szorzata"	átlag: 4,01 szórás: 1,02	átlag: 4,11 szórás: 1,13	átlag: 3,90 szórás: 1,16	átlag: 4,08 szórás: 1,16	átlag: 3,75 szórás: 1,18
„3-mal oszthatóság"	átlag: 4,05 szórás: 1,20	átlag: 4,08 szórás: 1,39	átlag: 3,90 szórás: 1,35	átlag: 3,97 szórás: 1,35	átlag: 3,79 szórás: 1,44

A „Gondolkodtató feladatok" teszt nyíltvégű kérdéseire adott válaszok elemzésével fogjuk majd megmutatni, hogy milyen jellegű különbségek vannak a tanuló által konstruált bizonyítási stratégiák és a készen kapott válaszlehetőségek értékelése között. Ami a deduktív bizonyítások értékelésével kapcsolatban szembetűnő, az a két utolsó feladatra adott szignifikánsan alacsonyabb átlagok, amely a hetedikesek kivételével minden populációban jellemző volt. A páratlan számok szorzatára vonatkozó állítás esetében magyarázatot jelent, hogy a szimbolikus bizonyítások ennél a feladatnál jelentősen magasabb osztályzatokat kaptak, és a már említett legjobb választ kereső stratégia miatt sok tanulónál a deduktív bizonyítás a második helyre került.

Évfolyamok, iskolatípusok szerinti különbségek

A matematikai bizonyítási teszt egyik érdekes, ám korántsem váratlan eredménye, hogy következetesen megnyilvánuló különbségek vannak az egyes évfolyamok, valamint a középiskolások körében a gimnazisták és a szakközépiskolások között. Nincs elegendő információnk ahhoz, hogy megmondjuk, a különbségekből mennyi vezethető vissza az egyéni fejlődési mutatók összegének különbségére, és mennyi az iskolarendszerben megvalósuló szelekcióra. Egy másik probléma, ami miatt nem beszéltünk eddig fejlődésről, a mérőeszköz sajátosságaiban keresendő. Nyilvánvaló, hogy önmagukban a bizonyítási sémákra adott osztályzatok nem fejeznek ki fejlettséget. A későbbiekben az adatokból olyan mutatószámot fogunk generálni, amely betöltheti a fejlődés indikátorának szerepét.

Ha az eddig bemutatott adatok alapján kvalitatív jellemzést szeretnénk adni arról, hogy az egyes évfolyamokon és iskolatípusokban hogyan értékelik a tanulók a különböző matematikai bizonyításokat, a következő megállapításokat tehetjük:

– A hetedik osztályosokra a középiskolásoknál nagyobb mértékben jellemző az externális bizonyítástípusok (tekintélyelvű, rituális, szimbolikus) túlértékelése.

– A kilencedikes és tizenegyedikes középiskolások körében a rituális és deduktív bizonyítások esetében kisebb, a tekintélyelvű bizonyítások esetében nagyobb, de a különböző állításoknál következetesen megnyilvánuló különbségek vannak. Az empirikus és szimbolikus bizonyítások megítélése különbségének előjele a tartalommal együtt változhat.

– Az átlagokat tekintve a szakközépiskolások a hetedikes általános iskolások és a gimnazisták között helyezkednek el.

3.2.3. A „Gondolkodtató feladatok"-ban nyújtott tanulói teljesítmények jellemzése

A „Gondolkodtató feladatok" meglehetősen heterogén teszt volt, amely inkább szubtesztek halmazának tekinthető. Az első két feladat alapvető empirikus jellemzőit a „Bizonyítási feladatok" teszthez hasonló módon közöljük:

33. táblázat. A „Gondolkodtató feladatok" teszt feladatain tapasztalt válaszok átlaga és szórása

	5. osztály	7. osztály	9. osztály		11. osztály	
tesztitem			gimnázium	szakközépisk.	gimnázium	szakközépisk.
„A Föld gömbölyű"						
tekintélyelvű	**átlag: 3,28** szórás: 1,09	**átlag: 2,46** szórás: 1,32	**átlag: 1,47** szórás: 0,85	**átlag: 1,87** szórás: 1,08	**átlag: 1,45** szórás: 0,83	**átlag: 1,81** szórás: 1,04
rituális	**átlag: 2,45** szórás: 1,23	**átlag: 2,09** szórás: 1,04	**átlag: 1,56** szórás: 0,88	**átlag: 1,70** szórás: 0,86	**átlag: 1,37** szórás: 0,61	**átlag: 1,69** szórás: 0,84
szimbolikus	**átlag: 3,20** szórás: 1,20	**átlag: 2,86** szórás: 1,21	**átlag: 2,43** szórás: 1,18	**átlag: 2,48** szórás: 1,13	**átlag: 2,32** szórás: 1,19	**átlag: 2,76** szórás: 1,26
empirikus	**átlag: 3,68** szórás: 1,21	**átlag: 3,63** szórás: 1,11	**átlag: 3,11** szórás: 1,15	**átlag: 3,22** szórás: 1,21	**átlag: 2,96** szórás: 1,22	**átlag: 3,14** szórás: 1,22
deduktív	**átlag: 4,03** szórás: 1,13	**átlag: 4,16** szórás: 0,96	**átlag: 4,22** szórás: 1,05	**átlag: 4,29** szórás: 0,95	**átlag: 3,90** szórás: 1,15	**átlag: 3,84** szórás: 1,12
„Nem ég a városháza"						
tekintélyelvű	**átlag: 3,53** szórás: 1,46	**átlag: 2,98** szórás: 1,49	**átlag: 1,78** szórás: 1,11	**átlag: 2,37** szórás: 1,38	**átlag: 1,66** szórás: 1,03	**átlag: 2,17** szórás: 1,28
rituális	**átlag: 3,89** szórás: 1,23	**átlag: 3,38** szórás: 1,27	**átlag: 2,54** szórás: 1,32	**átlag: 3,11** szórás: 1,26	**átlag: 2,32** szórás: 1,27	**átlag: 3,06** szórás: 1,30
szimbolikus	**átlag: 3,60** szórás: 1,20	**átlag: 3,46** szórás: 1,22	**átlag: 3,03** szórás: 1,26	**átlag: 3,25** szórás: 1,30	**átlag: 2,75** szórás: 1,22	**átlag: 2,95** szórás: 1,22
empirikus	**átlag: 3,08** szórás: 1,18	**átlag: 2,80** szórás: 1,05	**átlag: 2,41** szórás: 1,15	**átlag: 2,52** szórás: 0,99	**átlag: 2,44** szórás: 1,14	**átlag: 2,47** szórás: 1,16
deduktív	**átlag: 3,89** szórás: 1,07	**átlag: 4,01** szórás: 1,05	**átlag: 4,34** szórás: 0,96	**átlag: 3,92** szórás: 1,17	**átlag: 4,39** szórás: 1,03	**átlag: 3,88** szórás: 1,16

A „Gondolkodtató feladatok" tesztjében az első két feladat formailag teljesen azonos volt a matematikai bizonyítási feladatokkal. Tartalmi szempontból az első feladat természettudományi - de akár hétköznapi - jellegűnek számított. A második feladat eredetileg egy logikai feladvány volt, de többen nem ismerték fel a matematikai jelleget. A táblázat adataiból megállapítható, hogy a logikai feladat bizonyításait a középiskolások teljesen hasonlóan értékelték, mint a matematikai bizonyítási feladatokat. Az általános iskolások esetében ugyanakkor a deduktív bizonyításokra adott alacsonyabb pontszámok, valamint a rituális és szimbolikus bizonyítások túlértékelése jellemző. A szimbolikus bizonyítások túlértékelése azért különösen érdekes, mert a feladat szövege alapján talán csak nagyon kevesen várták, hogy a matematikában szokásos szimbólumok megjelenjenek. Amikor azonban szembetalálták magukat ezzel a lehetséges opcióval, magas pontszámmal értékelték.

Mivel a matematikai bizonyítási teszt nem szerepelt ötödik osztályban, ezért a főbb bizonyítási sémák megítélésének az általános iskolai szakaszra eső változását e két feladat segítségével vizsgálhatjuk. Az ötödikesek és a hetedikesek átlagait összehasonlítva azt találtuk, hogy a deduktív bizonyítások megítélése nem különbözik jelentősen ($p=0,60$ ill. $p=0,10$ valószínűség mellett). Jelentős különbség van ugyanakkor mindkét esetben a tekintélyelvű és a rituális bizonyítások megítélésében ($p<0,01$ mindkét esetben). A rituális bizonyítások megítélése - mint korábban említettük - jelentős mértékben függhet a témakörben megszerzett ismeret jellegű tudáselemektől. A tekintélyelvű bizonyítások megítélése ezzel szemben nagyobb mértékben egy bizonyítási-érvelési stratégia megítélését jelentheti, és nem ismeretek meglétének vagy hiányának értékelését.

A „Bizonyítási tesztben található feladatokhoz és a „Gondolkodtató feladatok" teszt első két tételéhez is kapcsolódott egy rövid kiegészítés, amely az állítás nyilvánvalóságát és a bizonyítás szükségességét kérdezte a tanulóktól, akiknek egy háromfokú skálán kellett véleményüket kifejezni. A kapott eredmények egy része a leíró statisztika eszközeivel is érdekes következtetéseket tesz lehetővé, de mivel a fő cél a nyilvánvalóság és a bizonyítás szükségessége megítélése közötti összefüggés megállapítása volt, ezért a kiegészítendő kérdésekre kapott válaszokat a változók összefüggéseit bemutató fejezetben közöljük.

A négy következtetési szabályra épülő feladatrendszeren elért eredmények

A „Gondolkodtató feladatok" teszt következő része egy négyelemű szabályrendszerre készült feladat volt, amelyben sorrendben a modus ponens, az előtag cáfolata, a következmény megerősítése és a modus tollens szabályok szerepeltek. Számos kutatás vizsgálta már (ld. *Evans*, 1982), hogy a pszichikumban hogyan működnek ezek a szabályok. Nyilvánvaló, hogy a tesztelés körülményei nagy mértékben meghatározzák az eredményeket. A mi mérőeszközünkben feleletválasztós feladat formájában szerepelt a vonatkozó négy tétel. A 34. táblázatban a modus ponens itemen elért eredmények relatív gyakoriságát mutatjuk be. Az a) válasz a logikai szempontból helyes, a b) „is-is" jellegű, a c) logikai szempontból téves.

34. táblázat. A modus ponens feladat itemein elért eredmények relatív gyakorisága (%)

	5. osztály	7. osztály	9. osztály		11. osztály	
tesztitem			gimnázium	szakközépisk.	gimnázium	szakközépisk.
a)	58,75	72,44	84,16	77,78	91,36	86,72
b)	25,07	17,31	12,11	14,67	4,94	9,54
c)	16,19	10,26	3,73	7,56	3,71	3,73

Ha önmagában nézzük a táblázat adatait, akkor is elég különös eredmények születtek. Ha a másik három szabály empirikus táblázataival összevetjük, akkor még inkább úgy érezhetjük, hogy valami probléma lehet a *feladat*tal. Úgy gondolom, hogy az eredmények alapján nem szabad azt kijelenteni például, hogy az ötödik osztályosoknak csak kevesebb, mint 60%-a képes a modus ponens szabályt használni. Használni ugyanis - más módszerekkel nyert adatok szerint - már a hat évesek is tudják ezt a szabályt. Majd látni fogjuk, hogy a modus tollens esetében jobb eredmények születtek ötödik osztályban, mint a modus ponens szabály feladatán. A különös eredmények hátterében feltehetőleg két dolog áll.

Egyrészt sok tanuló nem értette, mi is a feladat, hiszen nagyon könnyűnek tűnhetett. Máskor is tapasztaltuk már (pl. *Csíkos*, 1999a), hogy egy kognitív feladat megoldása során gyakran rendkívül egyszerű lépésekben sem következetesek a tanulók. A másik ok az lehet, hogy a feladat szövegében lovagok és lókötők szerepeltek. A szóbeli interjúk során döbbentünk rá, hogy sokaknak problémát okozhatott, hogy a feladat végkövetkeztetése szerint a lókötők virágot visznek egy születésnapját ünneplő lovagnak. Aki ugyanis nem a formális logikai feladatot látja a problémában, hanem megpróbálja elképzelni, történetként reprezentálni a szöveget, az fönnakadhat azon, hogy a lókötők miért tesznek olyan jót egy lovaggal, hogy virágot visznek neki.

A következő szabály az előtag cáfolata plauzíbilis szabály volt. Logikai szempontból a b) válasz a helyes, tehát fel kellene ismerni az indetermináltságot. Külföldi és hazai eredmények ugyanakkor rendszeresen azt mutatják, hogy még a felnőttek többsége is determinisztikus szabálynak tekinti az előtag cáfolata szabályt. Az indetermináltság felismerése gyakran azon múlik, hogy a feladat konkrét tartalma alapján sikerül-e ellenpéldát találni.

35. táblázat. Az előtag cáfolata feladat itemein elért eredmények relatív gyakorisága (%)

	5. osztály	7. osztály	9. osztály		11. osztály	
tesztitem			gimnázium	szakközépisk.	gimnázium	szakközépisk.
a)	12,95	5,79	3,12	4,00	2,47	2,92
b)	19,17	20,58	26,17	17,78	26,23	15,42
c)	67,88	73,63	70,72	78,22	71,30	81,67

A táblázat adatait a következő táblázatéval érdemes egybevetni. A kirajzolódó válaszgyakoriság-mintázat teljes mértékben összhangban van a korábbi eredményeinkkel (*Csíkos*, 1996). Eszerint az előtag cáfolata szabály indetermináltságát nagyobb arányban ismerik fel a tanulók, mint a következmény megerősítése szabályét. Ahogyan arra korábban utaltunk, *Bennett Lau* (1983, idézi *Falmagne*, 1990) szerint a két szabály működése a pszichikum szempontjából nagymértékben összefügg. Az adatok egyik érdekessége, hogy az évfolyamok szerinti változás lényegében csak a teljesen hibás, logikátlan válasz kizárásában mutatkozik.

A következmény megerősítése szabály nevéhez méltóan „erős" plauzíbilis szabály (ld. *Hársing*, 1981). A teljesen hibás, logikátlan megoldás előfordulásának aránya itt a legalacsonyabb az összes vizsgált szabály közül.

36. táblázat. A következmény megerősítése feladat itemein elért eredmények relatív gyakorisága (%)

	5. osztály	7. osztály	9. osztály		11. osztály	
tesztitem			gimnázium	szakközépisk.	gimnázium	szakközépisk.
a)	80,31	84,57	81,25	86,61	82,46	90,42
b)	17,36	14,17	16,88	11,61	16,92	7,50
c)	2,33	0,96	1,88	1,79	0,62	2,08

Szembetűnő a táblázat adatai alapján, hogy a tanulók többsége determinisztikusnak véli a szabályt. Ennek hátterében az állhat, hogy - nagyrészt a tesztelési kontextusból adódóan - a „ha..., akkor..." szerkezetet sokan „akkor és csak akkor igaz, ha..." logikai szerkezetként értelmezték. A kontextuális hatás azonban önmagában nem magyarázza meg a válaszok empirikus gyakoriságát, mert a feladat megfogalmazása nem kényszerítő arra vonatkozóan, hogy a premisszákból egyáltalán le kell-e vonni valamilyen következtetést. Adva volt ugyanis az az opció, amely a következtetés indetermináltságát fejezte ki.

37. táblázat. A modus tollens feladat itemein elért eredmények relatív gyakorisága (%)

	5. osztály	7. osztály	9. osztály		11. osztály	
tesztitem			gimnázium	szakközépisk.	gimnázium	szakközépisk.
a)	8,81	3,85	2,17	3,13	1,54	2,92
b)	20,98	14,42	13,98	12,95	8,64	10,42
c)	70,21	81,73	83,85	83,93	89,81	86,67

A modus tollens szabály alkalmazásában az 5. és 7. osztályosok közötti különbség figyelemre méltó. Ha az a), b) és c) válaszokhoz rendre 1, 2 és 3 pontot rendelünk, akkor az átlagok közötti különbség a Welch-próba szerint szignifikáns ($t=-3,808$, $p<0,01$).

A modus tollens szabály alkalmazása általában sokkal nehezebb, mint a modus tollens szabályé (*Evans*, 1982). Az alkalmazás milyensége függ a tagadószók jelenlététől és a tartalom ismertségétől is. Eredményeink szerint a modus tollens feladaton elért eredmények minden évfolyamon jobbak voltak, mint a modus ponens feladaton nyújtott teljesítmény. A különbség az általános iskolai évfolyamok esetében szignifikánsnak bizonyult. Ez arra mutat rá, hogy a modus ponens mellett a modus tollens alkalmazására is nagyon korán, 10-12 éves kortól képessé válik az ember. Vannak témakörök, amelyekben ennél hamarabb, és vannak területek, ahol csak jóval később. Minden bizonnyal olyan tartalmakon válik működőképessé először a modus tollens szabály, amelyek reprezentálásához nincs szükség nagyfokú absztrakcióra.

A pedagógiai számára fontos kérdés, hogy milyen módon zajlik le az a fejlődési folyamat, amelynek végén már absztrakt matematikai tartalmak esetében is explicit módon működik ez a fontos következtetési szabály. A modus tollens szabály jelentőségét kutatási témánk szempontjából két dologgal támasztjuk alá: 1) Egyes vélemények szerint (*Garrison* és *Bentley*, 1990) a modus tollens szabályon keresztül vezet az út a tudományos megismerésben nagyon fontos szerepet játszó falszifikációs elv felé. Bár ezt az állítást nem sikerült igazolnunk (*Csíkos*, 1999a), hogy a világról szerzett ismereteink megszerzésében sokszor az implicit modus tollens szabály működik közre.

A modus tollens alkalmazása alapvetően fontos az indirekt bizonyítások értelmezéséhez. Korábban áttekintettük az indirekt bizonyításokkal kapcsolatos matematikai módszertani elveket, és elfogadtuk azt a véleményt, mely szerint az indirekt bizonyításokat a matematikában először olyan témán kell bevezetni, ahol nem tűnik eleve lehetetlennek a bizonyítandó állítás tagadása, hiszen azt a bizonyítás folyamatában feltételként kell felhasználni. Hétköznapi témák esetén nagyon gyakran teljesül az a kritérium, hogy a bizonyítandó állítás ellentettje is lehetséges legyen. Például a vendégségbe indulás esetén nem lehetetlen, hogy otthon vannak, akikhez megyünk, tehát annak bizonyításában, hogy nincsenek otthon, fel tudjuk azt használni premisszaként. A modus tollens feladataiban elért eredmények arra mutatnak rá, hogy az indirekt bizonyításokkal kapcsolatos probléma egyrészt a bizonyítandó állítás ellentettjének lehetetlenségéből adódhat, másrészt a bizonyítások formalizált nyelve jelenthet nehézséget.

A négy következtetési szabályból álló rendszerünk feladatain elért eredményeket úgy foglalhatjuk össze, hogy a modus ponens és a modus tollens logikai szabályok használata nem jelent gondot a vizsgált korosztályokban. Éppen a két szabály könnyed használatával magyarázható, hogy nem érte el a 100%-ot a szabályok determináltságát kimondó opciókat választók aránya. A rendszer két plauzíbilis szabálya az alkalmazás során determinisztikus logikai szabályokhoz hasonló válaszmintázatokat eredményezett, azzal a különbséggel, hogy jelentős azok aránya, akik felismerték az indeterminált ságot.

A feleletalkotó feladatokon elért eredmények

A mérőeszközöket bemutató fejezetben már kitértünk arra, hogy az előfelmérés során több indoka is volt annak, hogy feleletalkotó feladatokat szerepeltessünk; ezzel szemben a nagymintás mérés során zömmel feleletválasztó feladat kerültek a tesztekbe. A „Gondolkodtató feladatok" közül az utolsók azonban a nyílt végű kérdések kategóriájába tartoztak. Az ezeken a feladatokon elért eredmények elemzése során hangsúlyt helyezünk arra, hogy milyen kapcsolat van a két típusú feladatokra adott válaszkategóriák között.

Az első feleletalkotó feladat két részből állt, amelyek tartalmilag és formailag is hasonlítottak egymásra. Az értékelés során kétfokozatú skálát használtunk: az egyik kategóriába az externális bizonyítások kerültek, a másikba az empirikus bizonyítás szintjét elérők. Korábban is utaltunk már rá, hogy univerzális kvantort nem tartalmazó állítások esetén gyakran nehéz az empirikus és deduktív bizonyítások megkülönböztetése, így itt nem is próbáltunk szétválasztani a két típust. Meggyőződésem, hogy sok esetben csak több kiegészítő kérdéssel, esetleg szóbeli interjú alapján lehetne megállapítani, hogy a pszichikus műveletek és stratégiák alapján melyik bizonyítástípusról van szó.

Az externális bizonyításokhoz 1-et, a magasabb szintűhöz 2-t rendelve, a következő átlageredmények születtek:

38. táblázat. Tanulói átlageredmények a „Római Birodalom" és „Pannon-tenger" feladatokon:

	5. osztály	7. osztály	9. osztály		11. osztály	
feladat			gimnázium	szakközépisk.	gimnázium	szakközépisk.
Római Birodalom	1,61	1,71	1,81	1,78	1,85	1,73
Pannon-tenger	1,66	1,84	1,84	1,89	1,90	1,87

Az átlagok közötti különbségek statisztikai vizsgálata során egyrészt az évfolyamok szerinti különbségeket vizsgáltuk, másrészt az egyes évfolyamokon belül a két feladat átlagait hasonlítottuk össze. Az évfolyamok szerinti különbségek együttes vizsgálatára a varianciaanalízis a standard eljárás, ám a szórások jelentős különbözősége itt sem tette lehetővé ennek alkalmazását. A Dunnett-féle post-hoc analízis ugyanakkor több tanulócsoport között is szignifikáns különbséget mutatott, ezért a Dunnett-próba alapján jelentősnek mutatkozó különbségek vizsgálatát megismételtük a lehető legérzékenyebb paraméteres statisztikai próbával, a kétmintás t- próbával.

A kétmintás t értékei szerint szignifikáns különbség van az 5. és 7. osztályosok között mindkét feladat esetében, valamint a hetedikesek és a gimnáziumi részminták átlagai között a „Római Birodalom" feladatban. Mivel az externális bizonyítások túlnyomó többségükben tekintélyelvűek voltak, az évfolyamok közötti különbség ezért azt mutathatja, hogy milyen mértékben van több tekintélyelvű bizonyítás az alacsonyabb évfolyamokon. A tartalom ismertségének hatását úgy próbáltuk kiküszöbölni, hogy az iskolai tananyagban szereplő állításokat szerepeltettünk. Természetesen nem gondoljuk azt, hogy ezzel kiküszöböltük a tárgyi tudás facilitáló hatását a bizonyítási stratégia kiválasztásában. A következő feladatok eredményei megmutatják, hogy a tartalom ismertségében mutatkozó különbségek megnyilvánulása milyen erőteljes lehet.

Az egyes évfolyamokon belül a két feladaton elért eredmények összehasonlítására a páros t-próba alkalmas. Ennek alapján csak két tanulócsoport esetében tartható meg az átlagok egyezését kimondó nullhipotézis: az ötödik osztályosok és a kilencedikes gimnazisták mintájában. A többi esetben a különbség statisztikai szempontból jelentős, ám pedagógiai szempontból nem minden esetben számottevő. Azzal az esettel állunk itt szemben, amikor „túl nagy" mintán történt a feladatok bemérése, és a szakmai szempontból jelentős különbség jóval nagyobb, mint amit a statisztikai próba jelentősnek mutat. Mivel pedagógiai szempontból az egy tizednyi különbségnek nincs nagy jelentősége (olyan, mintha minden iskolai osztályban egy-két tanuló a „Pannon-tenger" feladatban magasabb szintű bizonyítást adna), eredményeink a két feladat nagyfokú hasonlóságára mutatnak rá. A hasonlóság ugyanakkor alátámasztja azt a hipotézist, hogy e két feladattal a gondolkodás stratégia-szintjének komponenseit (is) mértük.

A tartalom hatásának elemzésére szolgáló szubteszten elért eredmények

A „Gondolkodtató feladatok" teszt három utolsó feladata egy szempontból jól meghatározott sorrendben került a tanulók elé. A cukor oldódásával kapcsolatos feladattal egy teljesen hétköznapi, és a konkrét tapasztalatokkal megegyező állítást kellett igazolni. A következő feladatban egy könnyen elképzelhető, meseszerű eseményről volt szó, amelyben azonban egy szokatlan szabály alkalmazása nehezítette a feladatmegoldó dolgát. Végül a közlekedési lámpákkal kapcsolatos feladat a valóságtól elrugaszkodott dolgokról szólt, nyakatekert szövegezésű szabályok értelmezését vártuk. Azt mondhatjuk, hogy a három feladat a tartalom ismertsége (az angol szóhasználat itt pontosabb lenne: familiarity) szempontjából sorrendbe helyezhető volt. A célunk az volt, hogy megvizsgáljuk, az alkalmazott bizonyítási stratégiák mutatnak-e valamilyen sorrendet. Amennyiben igen, úgy az a tartalom ismertsége és az alkalmazott bizonyítási stratégia közötti összefüggés indikátora lehet.

A „cukor oldódása" feladat elsősorban a választott bizonyítási stratégia elemzésére alkalmas, de emellett a feladatra adott válaszok gyűjteménye a természettudományos tévképzetek tárháza. A természettudományos szempontból korrekt választ a tanulók iskolai tanulmányukból még nem ismerték, mivel a megoldás a rendezetlenség törvényeivel kapcsolatos. Ez volt az a feladat, amelyben nagyon tisztán megnyilvánulhattak a tekintélyelvű, az empirikus és a deduktív bizonyítások is. A bizonyítási képesség szempontjából tehát nem az volt a válaszok kategorizálásnak alapja, hogy természettudományos szempontból mennyire helytállóak, hanem az, hogy milyen bizonyítási stratégiát használt a tanuló. A deduktív bizonyítási stratégiákat a természettudományos tévképzetek elemzése céljából további alkategóriákra bontottuk. Elsőként a bizonyítási kategóriák szerinti válaszgyakoriságokat tekintjük át.

39. táblázat. A „cukor oldódása" feladatban tapasztalt relatív válaszgyakoriságok bizonyítási típusok szerint (%)

	5. osztály	7. osztály	9. osztály		11. osztály	
Bizonyítási kategória			gimnázium	szakközépisk.	gimnázium	. szakközépisk.
externális	11,02	10,62	11,35	11,35	12,42	15,42
empirikus	10,19	10,27	7,80	7,57	7,84	9,45
deduktív	78,79	79,11	80,85	81,08	79,74	75,13

A táblázat adatai alapján egyértelmű, hogy a bizonyítási séma kiválasztásában teljes hasonlóság mutatkozik valamennyi évfolyam között. Feltűnő a deduktív bizonyítási séma használatának magas aránya. A következő feladatban már nagyobb fokú absztrakcióra volt szükség a megoldáshoz:

40. táblázat. Az „integető bennszülött" feladatban tapasztalt relatív válaszgyakoriságok bizonyítási típusok szerint (%)

Bizonyítási kategória	5. osztály	7. osztály	9. osztály		11. osztály	
			gimnázium	szakközépisk.	gimnázium	szakközépisk.
externális	19,35	17,67	14,02	15,29	11,55	19,70
empirikus	49,27	43,82	33,58	35,30	26,08	34,49
deduktív	31,38	38,51	52,40	49,41	62,37	45,81

A táblázat adatai alapján elénk táruló kép azt mutatja, hogy amikor egy állítás igazsága nem következtethető ki közvetlenül a tapasztalatból, sokkal többen vannak, akik empirikus bizonyítási stratégiát választanak. A „cukor oldódása" feladathoz hasonló arányban vannak, akik externális bizonyítást alkalmaztak. A deduktív bizonyítási stratégiát választók aránya ugyanakkor a bizonyítási képesség már bemutatott feladataihoz hasonló tendenciát mutat: legmagasabb arányban a 11. évfolyamos gimnazisták adtak deduktív bizonyítást.

A feladatrendszer harmadik tagja volt a legszokatlanabb feladat valamennyi tesztfeladat között. Ezt az mutatja, hogy a hiányzó változóértékek aránya több, mint 40% volt. A következő eredmények születtek:

41. táblázat. A „közlekedési lámpa" feladatban tapasztalt relatív válaszgyakoriságok bizonyítási típusok szerint (%)

Bizonyítási kategória	5. osztály	7. osztály	9. osztály		11. osztály	
			gimnázium	szakközépisk.	gimnázium	szakközépisk.
externális	44,73	31,22	36,18	45,52	31,99	41,11
empirikus	52,72	61,66	52,03	50,34	59,56	53,89
deduktív	2,55	7,12	11,79	4,14	8,45	5,00

A táblázat adatai azt mutatják, hogy milyen bizonyítási stratégiákat választottak a tanulók egy számukra nagyon szokatlan és idegen problémahelyzetben. A válaszmintázatok gyakorisága az előző két feladat során kialakult tendencia folytatásaként értelmezhető. Megnőtt a tekintélyelvű bizonyítások aránya, még magasabb szintre került az empirikus mintázatok gyakorisága, és nagymértékben lecsökkent a deduktív bizonyítások részaránya. Külön figyelmet érdemel az empirikus bizonyítások részarányának változása. Ezek változása ugyanis arról adhat felvilágosítást, hogy egy ismeretlen tartalmi területen általában milyen bizonyító stratégiákat használunk. Az empirikus bizonyítások a felnőttek számára is a legkézenfekvőbb stratégiát jelenthetik ilyen helyzetekben. A hetedik osztályban tapasztalt magas arányhoz képest a gimnázium kilencedik évfolyamán lecsökken a relatív gyakoriság. A csökkenés oka nem az, hogy a kilencedikes gimnazisták közül sokkal többen adnak deduktív bizonyítást, mert az externális bizonyítást adók száma is megnő. Érdekes, hogy a tizenegyedikes gimnazisták körében ismét magasabb arányban szerepelnek empirikus bizonyítások. Ez a jelenség teljes mértékben megmagyarázható a fejlődési bizonyításkategorizálási modellünk segítségével. Feltehetőleg a kilencedikes gimnazisták vannak a bizonyítási képesség fejlődésének azon szintjén, amikor az empirikus bizonyítások helyett „mindenáron" deduktív bizonyítást akarnak produkálni.

3.2.4. A fejlődési tendenciák jellemzése a bizonyítási képesség mérőszáma alapján

Az előfelmérés során a fejlődési tendenciákat a leíró statisztikai mutatók és a változók összefüggésrendszerének szorossága alapján jellemeztük. Megmutattuk, hogy az iskolai évfolyamokon előre haladva egyre karakteresebben körvonalazódik egy képességrendszer, amit a méréshez felhasznált feladatok alapján bizonyítási képességnek nevezhetünk. A tanulói válaszok statisztikai elemzése azt is nyilvánvalóvá tette, hogy a fejlődés során három fontos jelenség érdemel megkülönböztetett figyelmet:

1) A tekintélyelvű bizonyítások a fejlődés során háttérbe szorulnak.

2) A deduktív bizonyítások folyamatosan teret nyernek.

3) Az empirikus és szimbolikus bizonyítások közötti választásban jelentős szerepe van a tanári elvárások figyelembe vételének is.

A nagymintás mérés bizonyítási tesztjeivel lehetőség nyílt arra, hogy formailag egységes felépítésű itemekből álló teszt segítségével, a tudásszintmérésben használt tesztpontszámokhoz hasonló mutatóval írjuk le a fejlődést. A bizonyítási képességgel kapcsolatos elméleti alapvetések ismeretében azonban túlzott egyszerűsítésnek tekinthető, ha e többszintű képességrendszer fejlődését egydimenziós számadattal kívánjuk jellemezni. Azzal, hogy az eredményeket igyekszünk egyszerű számsorok és többdimenziós elemzések segítségével egyaránt interpretálni, lehetőséget kívánunk nyújtani az eredmények többrétű felhasználása számára is.

Amennyiben a bizonyítási képességtesztek feladatainak segítségével egyetlen pontszámmal kívánjuk jellemezni a bizonyítási képesség fejlettségét/fejlődését, a következő problémákat kell megoldani:

– Feladatonként kell egy számot hozzárendelnünk a teljesítményhez, mert az egyes válaszopciókra adott tanulói válaszok önmagukban csak korlátozott jelentéssel bírnak. Nagyobb jelentősége van annak, hogy az egyes bizonyítástípusok egymáshoz viszonyított megítélése milyen.

– A „Bizonyítási feladatok" négy matematikai állítása és a „Gondolkodtató feladatok" két formai szempontból ugyanolyan feladata együtt egy virtuális bizonyítási tesztet képezett. Mivel a két eredeti mérőeszköz megírása között egy-két nap különbség volt, a hat feladat együtt kezelése megalapozott.

– A hat feladat értékelése során többfokú skálát érdemes használni, mivel a dichotomizálás rendkívül nagy információvesztéssel járna.

Minden egyes feladatnál az öt opció elvileg 5^5 (=3125) féleképpen osztályozható. A gyakorlatban ugyanakkor sokan minden egyes osztályzatot pontosan egyszer osztottak ki. Ha ez a stratégia lett volna az általános, akkor is feladatonként 5! (=120) válaszmintázat lehetséges. Elméletileg lehetséges lenne, hogy minden egyes feladatnál 3125 vagy 120 legyen az elérhető maximális pontszám, a nem teljesen jó válaszmintázatok pedig valamilyen sorrendbe állítva egyre kevesebb pontot érnének. Nehéz ugyanakkor a sorrend felállítása például a csupa 1-es és csupa 5-ös osztályzatot tartalmazó válaszmintázat között. Sok esetben lényegtelen az osztályzatok abszolút nagysága, mert inkább az egymáshoz viszonyított nagyságrendek lényegesek. A megoldás kulcsa éppen abban van, hogy mit is jelentsen egy feladatnál a „teljesen jó" megoldás.

Az elméleti modellünket és az item-válaszgyakoriságok empirikus adatait figyelembe véve a következő pontozási módszert alkalmaztuk:

- 0 pont: Ha a válaszmintázat minősége nem éri el az 1 pontot
- 1 pont: Nincs olyan opció, amelyet kevésbé értékesnek minősített, mint a tekintélyelvű bizonyítást.

- 2 pont: Az előző szintet teljesítette + a deduktív bizonyítást értékesebbnek ítélte bármelyik másiknál.
- 3 pont: Az előző szintet teljesítette + az empirikus bizonyítást értékesebbnek minősítette mindhárom externális bizonyítástípusnál (tekintélyelvű, rituális, szimbolikus)

Látható, hogy az öt szerepeltetett bizonyításfajta közül egyeseknek nagy jelentőséget tulajdonítunk a bizonyítási képesség fejlettségének meghatározásában, másoknak kevésbé fontos szerepet szánunk. Ennek egyik oka, hogy mind tudománytörténeti szempontból, mind a bizonyítási képesség fejlődését leíró elméleti modellünk tesztelése szempontjából a tekintélyelvű, az empirikus és a deduktív bizonyítások érdemelnek megkülönböztetett figyelmet. Két konkrét példán bemutatjuk a pontozási rendszer alkalmazását:

42. táblázat. Elképzelt tanulói válaszmintázatok és az azoknak megfelelő pontszámok

Bizonyítástípus	1. tanuló	2. tanuló
tekintélyelvű	2	3
rituális	3	4
szimbolikus	2	3
empirikus	2	4
deduktív	5	4
bizonyítási képesség mérőszáma	2	1

Az 1. tanuló teljesítette az 1. szint kritériumát: ő már tudja, hogy a tekintélyelvű érvelés kétes értékű. Ugyanakkor a deduktív bizonyításra minden másnál magasabb pontszámot adott, tehát teljesítette a 2 pontos szintet is. A 3. szint teljesítése nem sikerült, mert az empirikus bizonyítást nem tartotta értékesebbnek az externális bizonyításoknál. A 2. tanuló az 1 pontos szinten átjutott, de a 2. kritériumot nem teljesítette: nem adott több pontot a deduktív bizonyításra, mint a többire.

A következő táblázatban két példát mutatunk 3 pontos válaszmintázatra:

43. táblázat. Maximális pontszámot érő elképzelt tanulói válaszmintázatok

Bizonyítástípus	3. tanuló	4. tanuló
tekintélyelvű	1	1
rituális	1	2
szimbolikus	1	3
empirikus	2	4
deduktív	5	5
bizonyítási képesség mérőszáma	3	3

A két válaszmintázat között jelentősnek tűnő különbségek vannak, mégis mindkettő kielégíti a 3. szint követelményeit. Valójában arról van szó, hogy a két példa különbözőségében az ordinális skálák sajátosságai nyilvánulnak meg. Mivel nincs egy egységes beosztásköz, amely az értékítéletek távolságát mérné, a válaszadó szubjektivitásán múlik, hogy az értéksorrend-reláció kifejezésére milyen különbségű számokat választ. A 3. tanulói válaszmintázat egészen közelít ahhoz, ami a matematikatanárokéra jellemző: a deduktív bizonyításra ötöst ad, az empirikust pedig kiemeli a többi közül azzal, hogy egy kicsit jobb jegyet ad rá. A 4. tanulói válaszmintázat minden osztályzatot kioszt a lehetséges öt közül, de a lényeg változatlan.

Mint észrevehető volt, a bizonyítási képesség fejlettségének mérésekor nem foglalkozunk azzal, hogy mekkorák az értékítéletet kifejező számok közötti különbségek, sem azzal, hogy a tanuló milyen mértékben különböztette meg egymástól az externális bizonyításokat. Az elméleti modellünk szempontjából a fejlődésben három fontos lépcsőt különítünk el, amely lépcsők elérése a tesztjeinkben alkalmazott feladatok megoldása során nyújtott teljesítményből kvantifikálható. Az 1. lépcsőt az jelenti, hogy a tanuló tisztába jön a tekintélyelvű érvelés tudományos szempontból alacsony értékével. A 2. lépcsőfok azt jelenti, hogy képes adott érvelési formák közül kiválasztani a deduktív bizonyítást. A 3. lépcsőfok pedig azt jelenti, hogy a tanuló szerint deduktív bizonyítások hiányában jobb az empirikus verifikáció, mint az értelem nélküli szimbólum-manipuláció vagy a deduktív bizonyítások verbalizálása során előforduló kifejezések, szófordulatok értelmetlen használata.

Az előbbiekben vázolt három fokozatú skála alkalmazásával hat darab politóm itemből álló mérőeszközként értelmezhetjük a „Bizonyítási feladatok"-at, kiegészítve a „Gondolkodtató feladatok" első két feladatával. Mielőtt megvizsgálnánk, hogy a hat itemből álló teszt hogyan mér, tekintsük át az egyes itemeken tapasztalt átlagokat és szórásokat.

44. táblázat. A politóm itemként értelmezett feleletválasztó bizonyítási feladatokon elért eredmények

Feladat	7. osztály	9. osztály		11. osztály	
		gimnázium	szakközépisk.	gimnázium	szakközépisk.
„a 2 az egyetlen páros prím"	átlag: 0,72 szórás: 0,89	átlag: 1,43 szórás: 1,08	átlag: 1,22 szórás: 1,05	átlag: 1,59 szórás: 1,09	átlag: 1,28 szórás: 1,09
„Háromszög belső szögeinek összege"	átlag: 0,91 szórás: 0,75	átlag: 1,68 szórás: 0,77	átlag: 1,32 szórás: 0,87	átlag: 1,75 szórás: 0,82	átlag: 1,46 szórás: 0,90
„3 páratlan szám szorzata páratlan"	átlag: 0,70 szórás: 0,80	átlag: 1,22 szórás: 0,79	átlag: 1,01 szórás: 0,85	átlag: 1,21 szórás: 0,79	átlag: 1,02 szórás: 0,89
„3-mal oszthatóság"	átlag: 1,18 szórás: 0,90	átlag: 1,61 szórás: 0,85	átlag: 1,35 szórás: 0,91	átlag: 1,65 szórás: 0,80	átlag: 1,41 szórás: 0,94
„gömbölyű Föld"	átlag: 0,79 szórás: 1,03	átlag: 1,42 szórás: 1,15	átlag: 1,03 szórás: 1,17	átlag: 1,38 szórás: 1,15	átlag: 0,91 szórás: 1,01
„ég-e a városháza?"	átlag: 0,61 szórás: 0,85	átlag: 1,12 szórás: 0,97	átlag: 0,74 szórás: 0,93	átlag: 1,34 szórás: 1,09	átlag: 0,82 szórás: 0,90

Az 5. osztályosok átlaga a „gömbölyű Föld" feladatban: 0,39 (szórás: 0,78), míg az „ég-e a városháza?" feladatban 0,41 (szórás: 0,67).

Kirajzolódni látszik a táblázat adataiból az a már többször megfigyelt tendencia, amely a középiskolások, azon belül pedig a gimnazisták jobb teljesítményét mutatta. Ez nem váratlan, hiszen itt a korábbi adatokból származtatott értékekről van szó.

A bizonyítási képesség fejődési tendenciáinak kvantitatív elemzése során akkor lennének a legmegbízhatóbbak a következtetéseink, ha a különböző életkorú részminták egymás időben eltolt megfelelői volnának. Kutatásunkban azonban nem szerepeltek szakmunkásképzős tanulók és azok sem, akik az általános iskola után nem tanultak tovább. Ha tehát a 7. osztályosok adatait közvetlenül összehasonlítható módon szeretnénk a középiskolás adatok mellé helyezni, akkor korrekciókat kell végrehajtani a hetedikes mintán. Az országos továbbtanulási és iskolatípus-arányokat figyelembe véve azt lehet mondani, hogy nagyjából az általános iskolai tanulók 2/3-a tanul tovább érettségit adó középiskolában. Ha feltételezzük, hogy a legjobb tanulmányi eredményű tanulók kerülnek gimnáziumba vagy szakközépiskolába, akkor a tanulmányi átlag alapján a legjobb 67% kerülhet a 7. osztályosok korrigált részmintájába. Implicite azt is feltételeztük, hogy a továbbtanulás szempontjából fontos jegyek alapján ugyanazok kerülnek az első 2/3-ba, mint az általunk mért tanulmányi átlag alapján, továbbá korábbi vizsgálatokban szerzett tapasztalataink alapján a tanulók nagy valószínűséggel őszintén töltötték ki az osztályzatokra vonatkozó kérdéseket. A hetedikesek korrigált részmintáját tehát úgy képeztük, hogy a legalább 3,3-es átlaggal rendelkezőket kiválasztottuk. A megfelelő összehasonlítás kedvéért természetesen az évfolyamonkénti két középiskolás részmintát összevontuk, a legtöbb feladatban három, a két nem-matematikai bizonyítási feladaton pedig négy populációról vannak adataink.

45. táblázat. A bizonyítási képesség mérőszámának alakulása iskolai-évfolyamok szerint

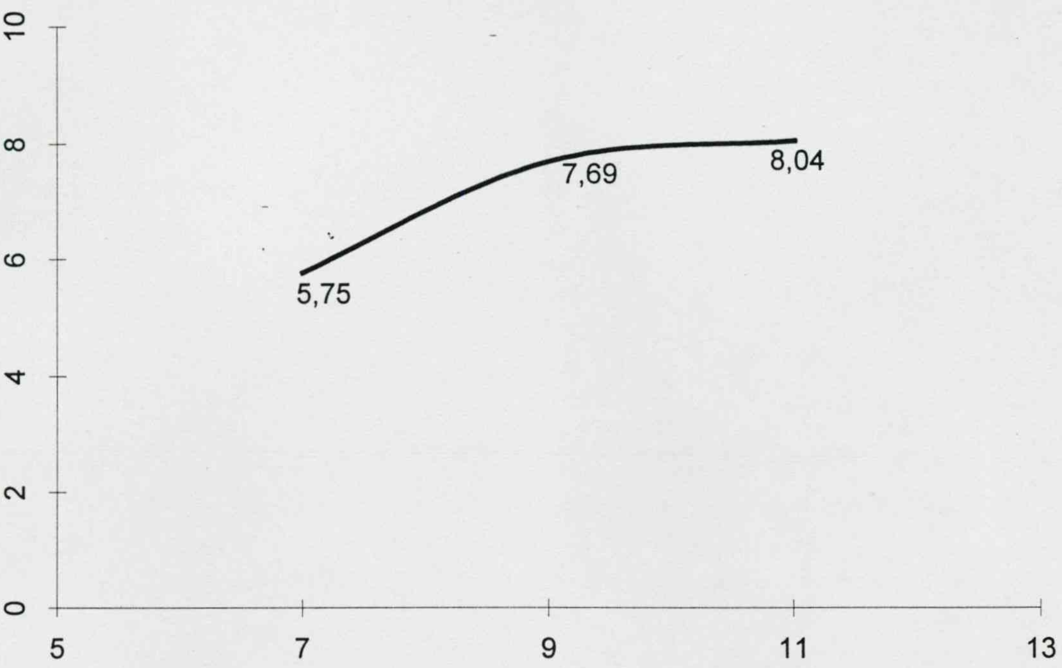
Feladat	7. osztály (korrigált)	9. osztály	11. osztály
„a 2 az egyetlen páros prím"	átlag: 0,90 szórás: 0,95	átlag: 1,34 szórás: 1,07	átlag: 1,45 szórás: 1,10
„Háromszög belső szögeinek összege"	átlag: 0,99 szórás: 0,71	átlag: 1,52 szórás: 0,83	átlag: 1,63 szórás: 0,86
„3 páratlan szám szorzata páratlan"	átlag: 0,79 szórás: 0,72	átlag: 1,13 szórás: 0,82	átlag: 1,12 szórás: 0,84
„3-mal oszthatóság"	átlag: 1,34 szórás: 0,87	átlag: 1,49 szórás: 0,88	átlag: 1,55 szórás: 0,88
„gömbölyű Föld"	átlag: 0,93 szórás: 1,09	átlag: 1,25 szórás: 1,18	átlag: 1,17 szórás: 1,11
„ég-e a városháza?"	átlag: 0,81 szórás: 0,92	átlag: 0,96 szórás: 0,97	átlag: 1,11 szórás: 1,04

Az 5. osztályosok esetében nem tudtunk korrigált részmintát képezni, mert több olyan tantárgy is van, amely a tanulmányi átlag és a továbbtanulás szempontjából meghatározó a későbbiekben, de ötödikben még általában nem tanulják.

A fejlődési tendenciák feladatok szerinti különbségeit vizsgálva két dologra fordítunk nagyobb figyelmet: 1) Van-e különbség a matematikai és nem-matematikai feladatokon elért eredmények között? 2) Melyik az a feladat, ahol viszonylag kicsi, és melyiknél viszonylag jelentős a fejlődés?

A matematikai és nem-matematikai bizonyítások között az átlagok nagyságrendjében van különbség: matematikai feladatokon magasabb átlagok születtek a két nem-matematikai feladathoz képest. Ez alól a megállapítás alól kivétel a „3 páratlan szám szorzata" feladat, amelyen szintén alacsony átlagok születtek a szimbolikus bizonyítás túlértékelése miatt. Az évfolyamok szerinti különbségeket illetően azt tapasztaltuk, hogy két feladatnál szinte azonos átlagok vannak: az egyik ilyen a „3-mal oszthatóság", a másik az „ég-e a városháza?" feladat. Ami közös lehet ebben a két feladatban, az a tartalom ismertsége. Ha viszont ez lenne az oka a stagnálásnak, akkor a „gömbölyű Föld" feladatnál is ezt kellett volna tapasztalnunk.

A fejlődési tendenciák vizsgálata kapcsán tudatosan kerültük a statisztikai próbák használatát. Az előfelmérés során megmutattuk, hogy a Jonckheere-Terpstra-próba fejlődési trendet jelez. A bizonyítási képesség mérőszámára szintén használható lenne valamelyik paraméteres próba, ám ha szignifikáns különbséget is kapnánk, az ennél a származtatott mérőszámnál nehezen lenne interpretálható. A fejlődési tendenciák jellemzésekor egyelőre a leíró statisztika eszközeivel élünk, a 8. ábrán pedig a vizuális szemléltetés a célunk.



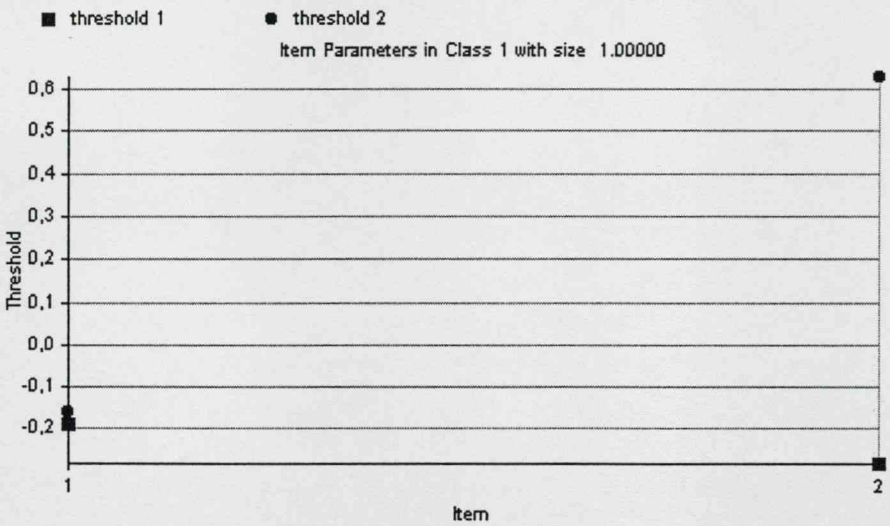
8. ábra. A bizonyítási képesség mérőszáma változásának empirikus görbéje

Három adatpontból megrajzolt görbe futását illetően elég sok bizonytalansággal találkozhatunk. Ha azonban tudjuk, hogy a képesség jellegű tudás fejlődési görbéi a legtöbb esetben nyújtott S alakúak, és tekintetbe vesszük a centrális határeloszlás tételét, akkor feltételezhetjük, hogy egy konkáv görbeszakaszt látunk. A fejlődési görbe futásának értelmezéséhez szükséges egy külső kritériumot találni, amelyhez viszonyíthatjuk a görbe értékeit. Mivel az interpretációs objektivitás megsértése nélkül nem tudtunk számszerű kritériumot felállítani arra vonatkozóan, hogy milyen értéktől kezdve „jó" a mérőszám, ezért a számértékek interpretációja során - az egyes populációkban normális eloszlást feltételezve - a norma-orientált értékelés talaján állunk. A feladatok sokfélesége és a politóm itemek jelenléte azonban a klasszikus tesztelméleti statisztikai mutatók használatát is megnehezíti. A skálázási validitás biztosításának igénye (összefüggésben a reliabilitás problémájával) és az egyes feladatokon belül a különböző pontértékű válaszmintázatok elemzésének fontossága a modern tesztelméleti (item-response theoretical) módszerek alkalmazását igényelte.

A modern tesztelmélet alkalmazásának célja, hogy a teljesítményeket valószínűségi szemlélettel írjuk le. Ezen a területen a klasszikus tesztelméletek korlátait jól szemlélteti a következő példa. Ha van hat feladatunk, amelyeken egyenként maximálisan három pontot lehet elérni, akkor a hat feladaton elért 9 pontos teljesítmény pontosan azt jelenti, hogy feladatonként átlagosan 1,5 pontot sikerült teljesíteni. Viszont a kilenc pontos összteljesítmény nem interpretálható úgy, hogy átlagosan egy feladat megoldása során 50%-os valószínűséggel születik teljes megoldás. Kétségtelenül igaz, hogy az 1,5 pont 50%-a a 3 pontnak, de a 9 pontos teljesítmény számos különböző módon adódhat hat szám összegeként, és a feladatok általában nem egyforma nehézségűek. A modern tesztelmélet korrekt értelmezést ad egy feladaton elért teljesítmény valószínűségének. Ezt a célt azzal tudja megvalósítani, hogy az egyes feladatok nehézségét populáció-független módon értelmezi (ld. *Horváth*, 1993; 1997; *van der Linden* és *Hambleton*, 1997).

A Winmira modern tesztelméleti program (von Davier, 1999) által készített ábrasorozattal bemutatjuk, hogy a logisztikus Rasch-modell alapján milyenek az adott populációkban az egyes itemek nehézségparaméterei. Az elemzésben csak azok a tanulók szerepelnek, akik legalább 1 pontot elértek az adott itemen. Arra voltunk ugyanis kíváncsiak, hogy a legalább 1 pontot teljesítők körében relatíve mekkora nehézséget jelent 2 illetve 3 pont elérése.

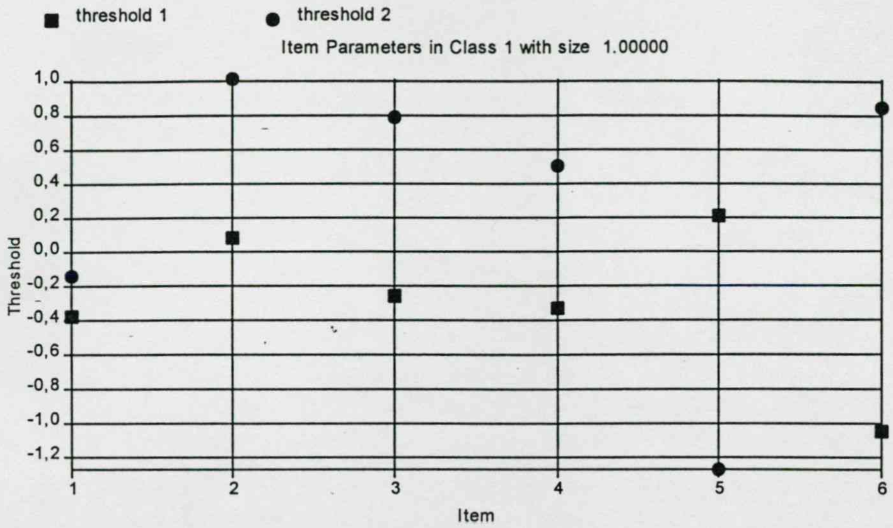
Az ábrákon a vízszintes tengelyen az item sorszáma található. Ötödik osztályban az 1-es a „gömbölyű Föld", a 2-es az „ég-e a városháza?" feladatot jelenti, a többi populációban az itemek sorrendje: 1- „2 az egyetlen páros prím", 2- „háromszög belső szögeinek összege", 3- „3 páratlan szám szorzata", 4- „3-mal oszthatóság", 5-ös a „gömbölyű Föld", 6-os pedig az „ég-e a városháza?" feladat. A függőleges tengelyen a nehézségparaméterek szerepelnek. Nehézségparaméternek nevezzük a logisztikus Rasch-modellben azt a képességparaméter, amely esetén az item megoldásának valószínűsége 50%. Politóm itemekről lévén szó, minden itemhez két nehézségparaméter tartozik: az első (threshold 1) azt mutatja, hogy az 1 pontról 2 pontra lépés valószínűsége milyen képességparaméter esetén éri el az 50%-ot. A második nehézségparaméter (threshold 2) azt jelzi, hogy a 2 pontról 3 pontra lépésnek milyen képességparaméter esetén 50% a valószínűsége.



9. ábra. A bizonyítási képesség mérőszámának nehézség-paraméterei az egyes itemek esetén 5. osztályban a logisztikus Rasch-modell alkalmazásával

Az 5. osztályosok esetén két értékelhető item volt, ezért az itemek nehézségparaméterei voltaképpen a két item viszonyát tükrözik. Érdekesség, hogy a „gömbölyű Föld itemen" magasabb szintű képességparaméter tartozik az 1. lépcsőhöz (1 pontról 2 pontra ugrás), mint a másodikhoz. Ez arra mutat rá, hogy azok, akik a „gömbölyű Föld" feladaton 3 pontot értek el, a másik feladaton relatíve gyöngén teljesítettek. (Emlékeztetőül: 3 pontot az kaphatott, aki teljesítette a 2 pontos szint kritériumait, és az empirikus bizonyítást jobbnak értékelte az összes externálisnál.)

A következő ábrán a hetedik osztályosok hasonló adatait ábrázoltuk:

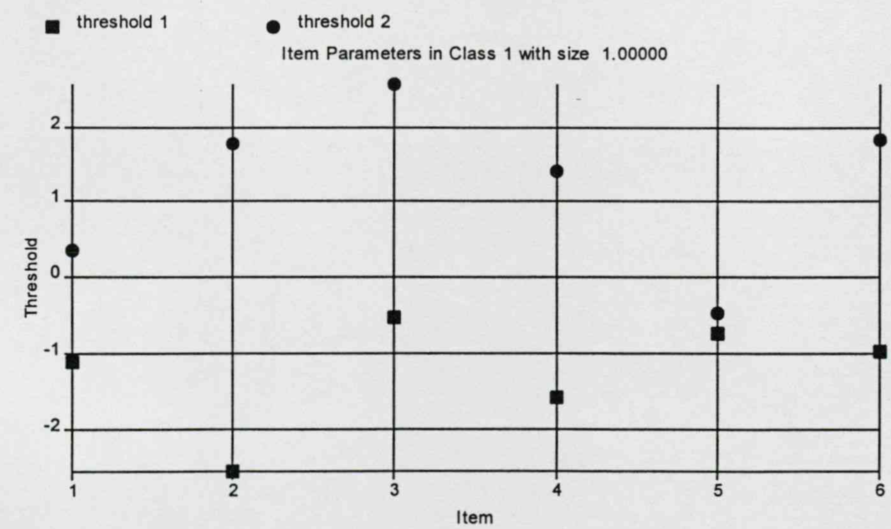


Megjegyzés: 1- „2 az egyetlen páros prím”, 2- „háromszög belső szögeinek összege”, 3- „3 páratlan szám szorzata”, 4- „3-mal oszthatóság”, 5-ös a „gömbölyű Föld”, 6-os pedig az „ég-e a városháza?” feladat.

10. ábra. A bizonyítási képesség mérőszámának nehézség-paraméterei az egyes itemek esetén 7. osztályban a logisztikus Rasch-modell alkalmazásával

A hetedik osztályosok ábráján még szembetűnőbb, hogy a „gömbölyű Föld” feladat másképp viselkedik, mint a többi. Azt találtuk tehát a modern tesztelméleti elemzésnek köszönhetően, hogy a „gömbölyű Föld” feladat a logisztikus modellilleszkedés szempontjából eltérő paraméterekkel rendelkezik. Ez feltétlenül azt jelzi, hogy a feladat mást mér, mint a többi.

Összehasonlításként tekintsük meg a 9. osztályos gimnazisták adatait:



Megjegyzés: 1- „2 az egyetlen páros prím”, 2- „háromszög belső szögeinek összege”, 3- „3 páratlan szám szorzata”, 4- „3-mal oszthatóság”, 5-ös a „gömbölyű Föld”, 6-os pedig az „ég-e a városháza?” feladat.

11. ábra. A bizonyítási képesség mérőszámának nehézség-paraméterei az egyes itemek esetén a 9. osztályos gimnáziumi mintán a logisztikus Rasch-modell alkalmazásával

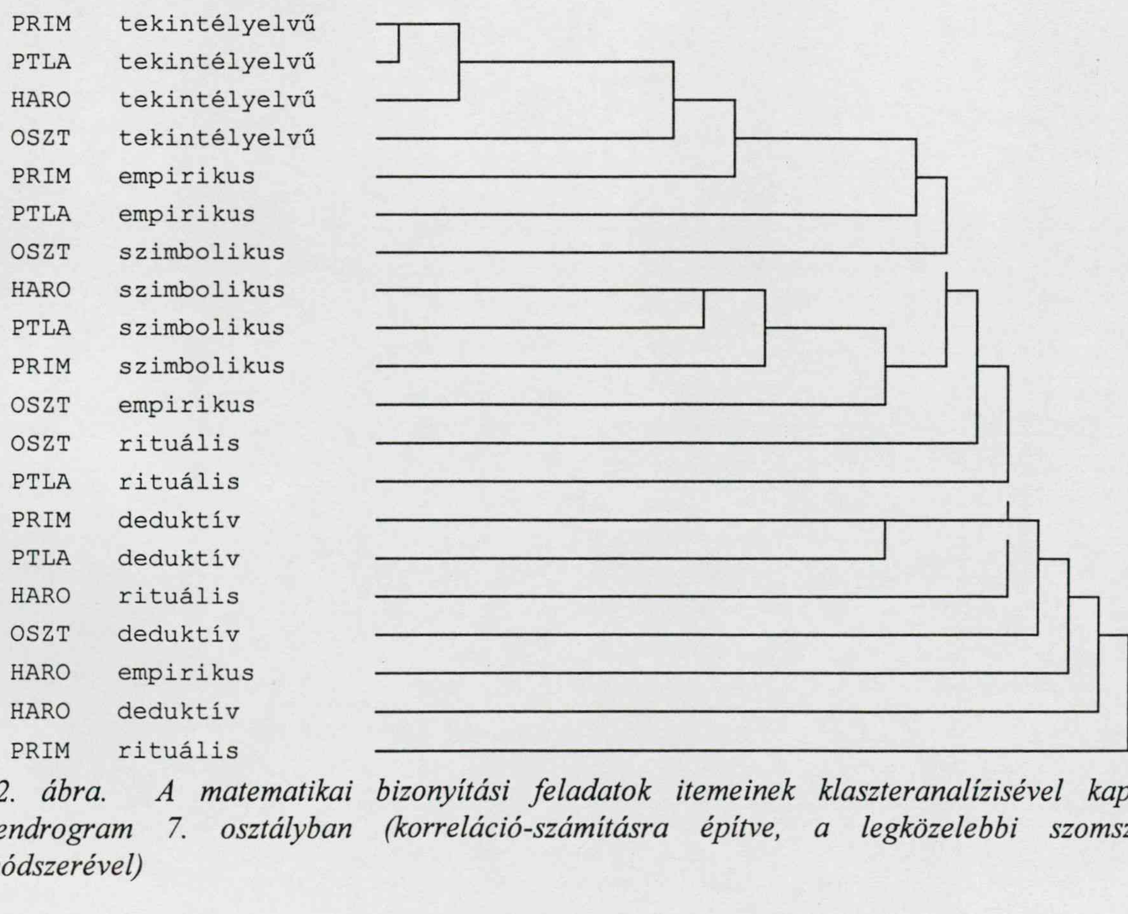
Ez az egyetlen populáció, amelyben a „gömbölyű Föld” feladat relatíve jobb mutatókkal rendelkezik. A kilencedikes gimnazistákra jellemző, hogy - egyszerűen fogalmazva - akik a „gömbölyű Föld” feladaton 3 pontot értek el, azok a többi feladaton is általában jobban teljesítettek, mint a „gömbölyű Föld” feladaton 2 pontot elérők.

3.2.5. A bizonyítási képesség tesztjeinek belső összefüggésrendszere

A fejezet címe pontosabb lenne, ha azt írnánk, „...belső összefüggésrendszerének fontosabb elemei”. Valójában ugyanis a mérőeszközök sokszínűsége, tartalmi és formai gazdagsága, tekintetbe véve az évfolyamok és iskolatípusok szerint képezhető részminták sokféleségét, rendkívül szerteágazó elemzéseket tett lehetővé. A következőkben néhány elméleti szempontból érdekesebb lehetőséget vizsgálunk meg. Az előfelmérés során az egyes feladatokon nyújtott teljesítmények közötti összefüggések szorossága évfolyamonként jelentős különbségeket mutatott, és ezeket a különbségeket felhasználtuk a fejlődési tendenciák jellemzésére is. Jelenlegi céljaink érdekében és terjedelmi okokból nem fogunk minden esetben minden évfolyamot megvizsgálni; az összefüggésrendszerek ugyanis legtöbbször egy jól strukturált számhalmazzal jellemezhetők; az ilyen számhalmazok évfolyamok szerinti különbségei és változásai pedig legtöbbször kvalitatív eszközökkel jellemezhetők.

A matematikai bizonyítási feladatok összefüggései

A négy matematikai feladat húsz itemén elért eredmények elemzését annak vizsgálatával kezdjük, hogy a húsz item közötti rokonsági kapcsolatok vajon elsősorban a bizonyítástípus vagy inkább a konkrét feladat szerint szerveződnek.

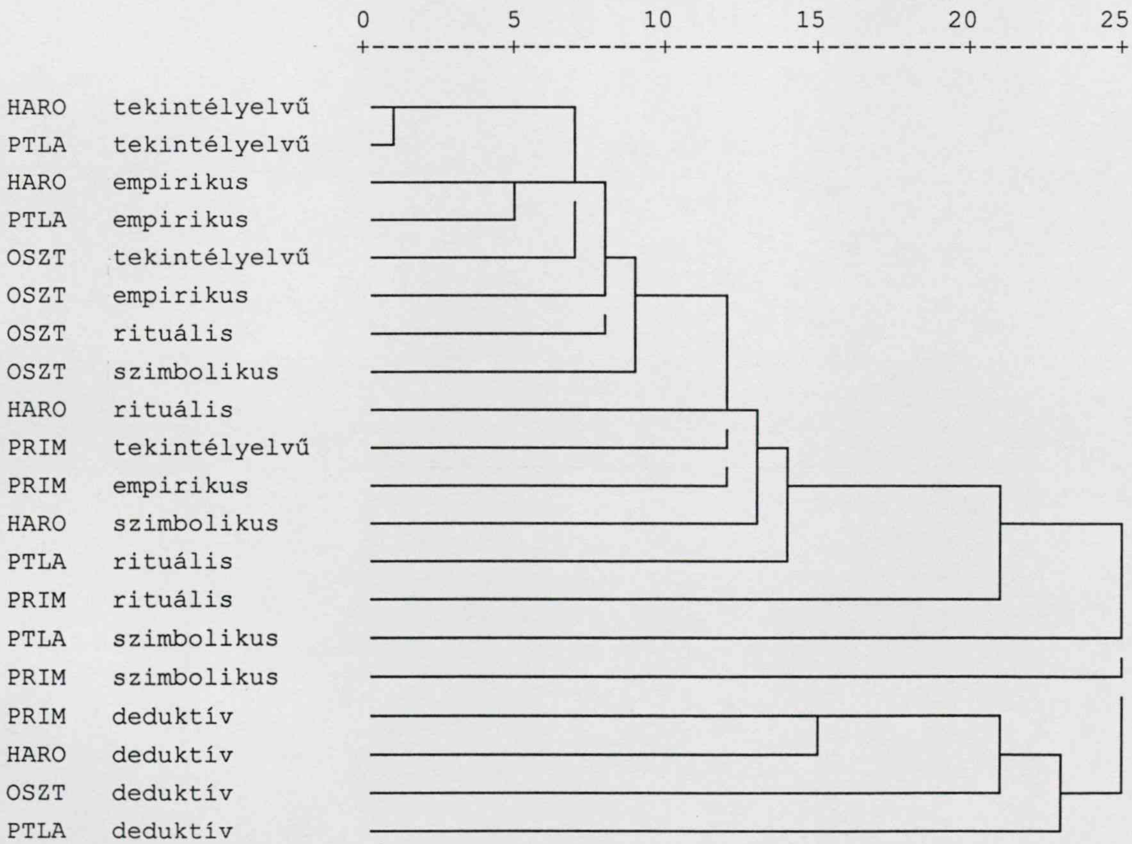


12. ábra. A matematikai bizonyítási feladatok itemeinek klaszteranalízisével kapott dendrogram 7. osztályban (korreláció-számításra építve, a legközelebbi szomszéd módszerével)

A változórendszer struktúrájának feltárására a klaszteranalízis az egyik megfelelő módszer. Ezzel az eljárással a következetesen együtt változó értékeket kapó itemek kerülnek egy klaszterbe, amit a fagráfon minél hamarabbi összekapcsolódás jelez. Ha elsősorban a bizonyítástípus szerint történt együttmozgás, akkor az ábrán a különböző tartalmú, ám azonos típusú bizonyítások kapcsolódnak össze először. Ez az egyes bizonyítási sémákkal kapcsolatos értékítéletek stabilitását jelezheti 7. osztályban.

A tekintélyelvű és szimbolikus bizonyítások megítélésében a fagráf alapján eléggé következetesek a tanulók. Egyéb bizonyításfajták esetében nagyobb mértékű keveredés figyelhető meg. A legkevésbé az empirikus bizonyításokról valószínűsíthető, hogy megítélésük következetes. Nagyon valószínű, hogy az empirikus bizonyítások értékelése során megnőtt a konkrét tartalom hatásának jelentősége. Az ábra alapján nem volt megfigyelhető olyan feladat, amelynél az öt opció közeli kapcsolódással egy klaszterbe került volna. Ennek előfordulása azt jelenthette volna, hogy a tartalom függvényében egyes feladatok opciói általában magas, más feladaté alacsony pontszámokat kaptak. Ez a tény a teszt méréselméleti szempontból értelmezett jóságát támasztja alá. Az klaszteranalízis eredményeinek helyes értelmezéséhez hozzátartozik a kapcsolódások szignifikanciájának vizsgálata. A 12. és 13. ábra fagráfján valamennyi kapcsolat szignifikáns a klaszterezés alapjául szolgáló korrelációs együtthatók vizsgálata alapján.

A 11. évfolyamos gimnazisták hasonló fagráfja a következő ábrán látható:



13. ábra. A matematikai bizonyítási feladatok itemeinek klaszteranalízisével kapott dendrogram a 11. évfolyamos gimnáziumi mintán (korreláció-számításra építve, a legközelebbi szomszéd módszerével)

Szembetűnő különbség a 7. osztályosok adataiból készült ábrához képest, hogy itt egy klaszterbe kerültek a deduktív bizonyítási opciók. A többi bizonyításfajta esetében már keveredés figyelhető meg, talán a szimbolikus bizonyítások tűnnek még karakteresen elkülönülőnek. Egy másik szembetűnő különbség, hogy itt a tartalmi szempontú kapcsolódások is igen közeliek: azonos feladat különböző típusú bizonyításai kerültek szorosan egymás mellé. Míg hetedik osztályban a tanulók értékítéletében legbiztosabban a tekintélyelvű bizonyítások válnak el a többi bizonyításfajtától, addig a 11. évfolyamos gimnazisták adataiból a deduktív bizonyítások különleges helyzete következik. Ezek a különbségek jelenthetik a feladatmegoldó stratégia különbségeit: a tizenegyedikesek a tizenegyedikesek először kiválasztották a legjobb megoldást, és azután ehhez viszonyították a többit. A hetedikesek számára ugyanakkor a bizonyítástípusok értékeléséhez a tekintélyelvű és szimbolikus bizonyítások jelenthették a fogódzót, mert ezeket a legkönnyebb felismerni.

A bizonyítási feladatokhoz kapcsolódott egy zártvégű feladat, amelyben a tanulóknak meg kellett adniuk, hogy az adott állítás mennyire nyilvánvaló és a bizonyítás mennyire szükséges. A két változó közötti összefüggés vizsgálatára korreláció-számítást alkalmaztunk.

46. táblázat. Az állítások nyilvánvalóságára és a bizonyítás szükségessége közötti korrelációs együtthatók.

	5. osztály	7. osztály	9. osztály		11. osztály	
Feladat			gimnázium	szakközépisk.	gimnázium	szakközépisk.
„a 2 az egyetlen páros prím"	-	0,37	0,64	0,48	0,59	0,52
„a háromszög belső szögeinek összege"	-	0,54	0,66	0,51	0,63	0,65
„három páratlan szám szorzata"	-	0,54	0,68	0,54	0,63	0,57
„3-mal oszthatóság"	-	0,63	0,66	0,61	0,69	0,56
„gömbölyű Föld"	0,36	0,69	0,69	0,63	0,71	0,65
ég-e a városháza?"	0,29	0,51	0,56	0,58	0,58	0,33

Megjegyzés: Valamennyi együttható esetében $p<0,01$.

A korrelációs együtthatók táblázata alapján kibontakozó kép világos: valamennyi részmintán jellemző, hogy szignifikáns összefüggés van egy állítás nyilvánvalóságának megítélése és a bizonyítás szükségessége között. Mivel valamennyi együttható szignifikáns, kérdésként vethető föl, hogy az esetenként meglehetősen nagy számértékbeli különbségek miatt meg lehet-e állapítani statisztikai szempontból jelentős különbségeket. Mondható-e az, hogy az ötödikesek esetében tapasztalt értékek szignifikánsan alacsonyabbak, mint a hetedikeseké? A jelenség vizsgálatára alkalmas Z-próba alapján azt mondhatjuk, hogy a táblázat értékei közötti különbség akkor jelentős, ha 0,2-nél nagyobb.

A „Római Birodalom" és a „Pannon-tenger" összefüggései

A „Gondolkodtató feladatok" teszt két formailag és tartalmilag hasonló feladatával kapcsolatban feltételezhető volt, hogy akik az egyik feladatra tekintélyelvű bizonyítást adnak, azok nagy valószínűséggel a másikra is; aki pedig tekintélyelvűnél magasabb szintű bizonyítást ad az egyik feladatra, a másikon is hasonló teljesítményt nyújt. Ennek a hipotézisnek a teszteléséhez először megnéztük a két feladat eredményeinek kereszttábláját az 5. osztályosoknál:

47. táblázat. Az 5.osztályosok eredményeinek kereszttáblája a „Római Birodalom" és a „Pannon-tenger" feladatra

	Pannon 1	Pannon 2	Együtt
Róma 1	76	46	122
Róma 2	33	158	191
Együtt	109	204	313

Hipotézisünk akkor lenne biztosan igaz, ha csak a főátlóban találnánk számokat, a jobb felső és bal alsó sarokban nem. A 313 tanulóból, akik válaszoltak mindkét feladatra, 234-en azonos értékű bizonyítást adtak mindkét feladatra. A két változó kapcsolatának szorosságát jellemző kontingencia-koefficiens 0,42, ami $p<0,001$ szinten szignifikáns.

48. táblázat. A 7.osztályosok eredményeinek kereszttáblája a „Római Birodalom" és a „Pannon-tenger" feladatra

	Pannon1	Pannon 2	Együtt
Róma 1	32	39	71
Róma 2	8	172	180
Együtt	40	211	251

A hetedik osztályosok mintájában nagyobb mértékű következetesség figyelhető meg a bizonyítástípusok alkalmazásban: az adatok 83,1%-a a főátlóban található. A kontingencia-koefficiens értéke: 0,45 ($p<0,001$)

A két általános iskolai részminta mellett a következőkben a 11. osztályos gimnazisták hasonló adatait vizsgáljuk.

49. táblázat. A 11.osztályos gimnazisták eredményeinek kereszttáblája a „Római Birodalom" és a „Pannon-tenger" feladatra

	Pannon 1	Pannon 2	Együtt
Róma 1	24	20	44
Róma 2	5	247	252
összesen	29	267	296

A gimnazisták esetében még szembetűnőbb, hogy összesen csak 25-en maradtak kívül a főátlón. A kontingencia-koefficiens értéke: 0,53 ($p<0,001$)

A bizonyítási képesség feladatonkénti mérőszámainak összefüggései

Az előző alfejezetben bevezetett mérőszám jóságát jellemezheti, hogy mennyire szoros összefüggések vannak a feladatonkénti mérőszámok között. Ennek vizsgálatára alkalmasak ugyan a korrelációs együtthatók, de a várhatóan sok-sok szignifikáns érték közötti különbségtételen alapuló elemzés nem célravezető. Olyan mutatószámra van szükség, amely a korrelációs együtthatók rendszerét egyetlen számadatba sűrítve jellemzi. A Kaiser-Meyer-Olkin-mutatóval már találkoztunk a reliabilitás-vizsgálat kapcsán. A Kaiser-Meyer-Olkin-mutató értékei itt azt mutatják, hogy közepesen szoros a változók összefüggésrendszere (*Kecskeméty* és *Izsó*, 1996).

50. táblázat. A bizonyítási feladatokból képzett virtuális tesztek Kaiser-Meyer-Olkin-mutatói

Részminta	KMO	itemek száma
5. osztály	-	2
7. osztály	0,76	6
9. gimnázium	0,68	6
9. szakközépiskola	0,72	6
11. gimnázium	0,68	6
11. szakközépiskola	0,68	6

3.2.6. A tanulói bizonyítási kérdőív eredményei

A tanulók matematikai bizonyításokkal kapcsolatos kérdőíve tíz állítást tartalmazott. Az eredetileg -2-től +2-ig terjedő ötfokú skálát az egyszerűbb adatrögzítés kedvéért átalakítottuk a megszokott 1-2-3-4-5 skálává. A következőkben közölt eredmények ebből kifolyólag úgy értelmezendők, hogy az 1-es a teljes egyet nem értést, a 3-as a közömbös álláspontot, az 5-ös pedig a teljes egyetértést jelöli.

51. táblázat. A tanulói bizonyítási kérdőív itemeinek átlagai

Állítás	7. oszt.	9. gimn.	9. szki.	11. gimn.	11. szki.
1. Ha egy matematikai tételt bebizonyítottak, akkor biztos lehetek abban, hogy a tétel igaz.	3,66	3,85	3,98	3,93	3,84
2. A matematikai bizonyítások megmagyarázzák *és* igazolják azt, ami igaz.	3,94	3,96	4,02	3,83	3,88
3. Ha megpróbálok magam bizonyítani egy tételt, akkor az segít, hogy meggyőződjek róla: a tétel igaz.	3,70	3,58	3,59	3,64	3,56
4. Könnyebb cáfolni valamit, mint igazolni.	3,23	3,32	3,17	3,19	3,33
5. Ha megpróbálok bizonyítani egy sejtést, az megváltoztathatja véleményemet annak igazságértékéről.	3,33	3,44	3,27	3,38	3,31
6. Ha egy tétel nyilvánvalóan igaz, akkor nincs értelme bizonyítani.	2,57	2,25	2,34	2,41	2,50
7. Egy matematikai tétel igazsága más matematikai tényektől függ.	3,39	3,72	3,35	3,80	3,62
8. Ha valami a tapasztalat alapján nyilvánvaló, az soha nem magyarázza meg, hogy miért kell az állításnak igaznak lennie.	3,02	3,36	3,00	3,20	3,12
9. Ha egy tételnek több bizonyítását látom, az segít jobban megérteni a tételt.	4,05	3,83	3,91	3,97	3,62
10. A bizonyítások néha kétes érvényességű trükköket tartalmaznak.	3,14	2,62	2,89	2,53	2,88

A táblázat adatai alapján egyes itemeken jelentősebb különbség van az évfolyamok között, más itemeken szinte teljesen egyforma átlagok születtek. Ha adatainkat leíró statisztikai szempontból elemezzük, akkor azt mondhatjuk, hogy az egyes tételek vonatkozásában nagyon közeli átlagok adódtak. Ez megerősíti a szakirodalmi áttekintés során is említett véleményt, mely szerint az oktatással szembeni rezisztencia tekintetében a bizonyításokról alkotott kép a természettudományos tévképzetek esetéhez hasonlít. Ha azonban adott valószínűségi szinten szeretnénk megállapítani, hogy egyes átlagok közötti különbségek statisztikai szempontból jelentősek-e, a variancia-analízis és az ahhoz kapcsolódó post-hoc elemzések (Tukey-próba, Dunnett-próba) az alkalmas eszköz. A résminták átlagai közötti különbség matematikai statisztikai elemzését a következő táblázat tartalmazza.

52. táblázat. A bizonyításokkal kapcsolatos tanulói kérdőív tételeinek vizsgálata variancia-analízissel

	Levene-stat.	p	ANOVA F	p
1. állítás	11,30	0,00	4,24	0,00
2. állítás	4,45	0,00	1,89	0,11
3. állítás	0,85	0,49	0,97	0,42
4. állítás	5,33	0,00	1,21	0,31
5. állítás	1,90	0,11	1,56	0,19
6. állítás	8,26	0,00	3,24	0,01
7. állítás	4,02	0,00	12,51	0,00
8. állítás	8,51	0,00	6,17	0,00
9. állítás	6,93	0,00	6,88	0,00
10. állítás	3,27	0,01	16,47	0,00

A variancia-analízis végrehajthatóságának szükséges feltétele, hogy a szórásértékek homogének legyenek az egyes részminták vonatkozásában. Ezt vizsgáljuk a Levene-statisztika segítségével. A Levene-statisztikához tartozó p értékek azt mutatják, hogy a pedagógiai és pszichológiai kutatásokban szokásosan alkalmazott 95%-os szignifikancia-szint mellett csak a 3. és 5. állítás esetében lehet elvégezni a variancia-analízist. Mindkét esetben a variancia-analízis azt mutatja, hogy megtartandó az átlagok egyezését kimondó nullhipotézis. Az ANOVA többi értéke alapján valószínűsíthető, hogy az átlagok a 2. és 4. állításnál is sem különböznek egymástól statisztikai szempontból jelentős mértékben, de ennek eldöntésére precíz módszert a Dunnett-féle T3-statisztika ad.

A Dunnett T3-elemzés segítségével nemcsak az mondható meg, hogy van-e jelentős különbség az átlagok között ott, ahol a szórások nagymértékben különbözők voltak, hanem azt is, hogy mely részminták átlagai miatt dől meg az átlagok egyezését kimondó hipotézis.

Az egyes állítások esetében a következőképpen jellemezhető az átlagok eltérése:

1. Ha egy matematikai tételt bebizonyítottak, akkor biztos lehetek abban, hogy a tétel igaz.

Az átlagok jelentős különbözőségének oka, hogy a 7. osztályosok sokkal kevésbé értenek egyet ezzel az állítással, mint a 9. évfolyamos szakközépiskolások (p=0,00) és a 11. évfolyamos gimnazisták (p=0,00).

2. A matematikai bizonyítások megmagyarázzák és igazolják azt, ami igaz.

3.. Ha megpróbálok magam bizonyítani egy tételt, akkor az segít, hogy meggyőződjek róla: a tétel igaz.

4. Könnyebb cáfolni valamit, mint igazolni.

5. Ha megpróbálok bizonyítani egy sejtést, az megváltoztathatja véleményemet annak igazságértékéről.

A 2-5. állítások esetében az átlagok egymáshoz olyan közeliek, hogy sem a variancia-analízis, sem a Dunnett T3-eljárás nem mutat ki statisztikai szempontból jelentős különbségeket.

6. Ha egy tétel nyilvánvalóan igaz, akkor nincs értelme bizonyítani.

Ebben a kérdésben a hetedikesek átlaga szignifikánsan magasabb ($p=0{,}02$) a 9. évfolyamos gimnazistákénál.

7. Egy matematikai tétel igazsága más matematikai tényektől függ.

Ennél az állításnál jobban polarizálódtak a vélemények (noha az item validitása kérdéses lehet), ami elsősorban a 7. osztályosok és a 9. évfolyamos szakközépiskolások többiekénél szignifikánsan alacsonyabb átlagának tudható be.

8. Ha valami a tapasztalat alapján nyilvánvaló, az soha nem magyarázza meg, hogy miért kell az állításnak igaznak lennie.

A 8. állítás esetében, az előzőhöz hasonlóan, azért nem lehetett tartani az átlagok egyezésére vonatkozó hipotézist, mert a 7. osztályosok és a 9. évfolyamos szakközépiskolások kevésbé értettek egyet az állítással, mint a többi csoportba tartozók.

9. Ha egy tételnek több bizonyítását látom, az segít jobban megérteni a tételt.

Az átlagok leíró statisztikai szempontból nem különböznek egymástól jelentősen. A 11. évfolyamos szakközépiskolások átlaga szignifikánsan alacsonyabb több másik részcsoporténál is ($0{,}00 <$ p értékek $<0{,}04$).

10. A bizonyítások néha kétes érvényességű trükköket tartalmaznak.

Ennél az állításnál a gimnazisták átlagai jelentősen alacsonyabbak ($p=0{,}00$) a többi csoporténál.

A mérőeszköz ismertetésénél kitértünk arra, hogy elméleti szempontból talán az 1., 6. és 10. állítások a legérdekesebbek. Mindhárom esetben azt mutatják az eredmények, hogy ezen állítások megítélésének változásában jelentős szerepe van az iskolának. Az 1. és 6. állításnál a hetedikesek lógnak ki a sorból, a 1. állításnál a gimnazistákra jellemző egy másfajta értékítélet. Abból a célból, hogy adatainkat összehasonlítsuk a forrással (*Almeida*, 1995), a következő táblázatban összefoglaltuk a hetedikesek, a 11. évfolyamos gimnazisták és az *Almeida* által vizsgált matematika szakos hallgatók átlagait:

53. táblázat. A tanulói bizonyítási kérdőív itemeinek átlagai két részmintán, összehasonlítva egy korábban végzett külföldi felmérés eredményeivel

	7. osztályosok	11. oszt. gimnazisták	Matematika szakos hallgatók (Almeida, 1995)
1. állítás	3,66	3,93	3,5
2. állítás	3,94	3,83	3,9
3. állítás	3,70	3,64	4,1
4. állítás	3,23	3,19	3,6
5. állítás	3,33	3,38	3,7
6. állítás	2,57	2,41	2,1
7. állítás	3,39	3,80	4,3
8. állítás	3,02	3,20	3,3
9. állítás	4,05	3,97	3,6
10. állítás	3,14	2,53	3,1

Az átlagok együtt mozognak a három mintában. Két állítást találunk, ahol valószínűsíthető, hogy egy egységes fejlődési vonal rajzolódik ki a tanulói vélemények változásában: 1) A 7. állítás esetében a matematikai iskolázottság mértéke játszhat szerepet abban, hogy egyre magasabb átlagok születtek. 2) Fordított tendencia, azaz csökkenő átlagok sorozata figyelhető meg a 6. állításnál. A tanulók az iskolarendszerben eltöltött évek arányában egyre inkább úgy érzik: akkor is van értelme bizonyítani egy állítást, ha nyilvánvaló.

3.2.7. A matematikatanári kérdőív eredményei

A matematikatanári kérdőív, amint azt a módszerek fejezetében ismertettük, három egységből állt. Először a tanulókéval teljesen azonos tíz állítás megítélését tekintjük át, majd matematikai bizonyításokkal kapcsolatos kérdések leíró statisztikai elemzésére térünk át, harmadsorban pedig két matematikai tétel öt-ötféle bizonyításának matematikatanári megítélését elemezzük.

A matematikatanári kérdőív első részében ugyanaz a tíz állítás szerepelt, amely a tanulók kérdőívében is. A tanároktól viszont nem azt kértük, hogy a saját értékítéletüket jelöljék meg a tesztlapon, hanem azt vártuk, hogy a matematikából jelessel rendelkező 9., illetve 11. évfolyamos tanulók véleményét ítéljék meg. A kérdésfeltevésnek ez a formája arra irányult, hogy megvizsgáljuk, a matematikatanárok szerint a középiskolai évek alatt történik-e lényeges változás a tanulók bizonyításokról kialakult képében.

54. táblázat. A matematikatanári kérdőív első tíz tételének átlagai:

Állítás	9. osztályos	11. osztályos	p
1. Ha egy matematikai tételt bebizonyítottak, akkor biztos lehetek abban, hogy a tétel igaz.	4,11	4,59	0,00
2. A matematikai bizonyítások megmagyarázzák *és* igazolják azt, ami igaz.	3,72	3,96	0,02
3. Ha megpróbálok magam bizonyítani egy tételt, akkor az segít, hogy meggyőződjek róla: a tétel igaz.	3,61	4,05	0,00
4. Könnyebb cáfolni valamit, mint igazolni.	3,79	3,79	0,88
5. Ha megpróbálok bizonyítani egy sejtést, az megváltoztathatja véleményemet annak igazságértékéről.	3,24	3,63	0,00
6. Ha egy tétel nyilvánvalóan igaz, akkor nincs értelme bizonyítani.	3,46	3,02	0,01
7. Egy matematikai tétel igazsága más matematikai tényektől függ.	3,33	3,84	0,00
8. Ha valami a tapasztalat alapján nyilvánvaló, az soha nem magyarázza meg, hogy miért kell az állításnak igaznak lennie.	3,16	3,26	0,31
9. Ha egy tételnek több bizonyítását látom, az segít jobban megérteni a tételt.	3,60	4,00	0,00
10. A bizonyítások néha kétes érvényességű trükköket tartalmaznak.	3,18	2,86	0,01

A táblázat harmadik oszlopa az átlag-párokra elvégzett páros t-próbával nyert p értékeket tartalmazza. Így a tanulói válaszokkal egybevetve a tanári kérdőívet, azt találjuk, hogy a tanárok szerint a legtöbb állítás megítélésében jelentős különbség van a 9. és 11. évfolyamosok között. Ugyanakkor a tanulói kérdőív alapján nem történik jelentős változás. Az adatok így inkább azt fejezik ki, hogy a tanárok mely területen látnak lehetőséget a fejlesztésre.

A matematikatanári kérdőív második része az iskolai matematikai bizonyításokkal kapcsolatos egyszerű kérdéseket tartalmazott. Először három matematikai tétel megnevezését kértük, amelyeket a válaszadó a bizonyítási képesség fejlesztése szempontjából a legfontosabbnak ítél. A matematikatanári kérdőívnek ez a kérdése arra a jelenségre mutatott rá, hogy matematikatanáraink szerint vannak olyan tételek, amelyek nem azért fontosak, mert a feladatmegoldás során felhasználhatók, hanem kifejezetten a bizonyítás képesség fejlesztése szempontjából. A legtöbb szavazatot a következő tételek kapták:

55. táblázat: A leggyakoribb válaszok a bizonyítási képesség szempontjából fontos tételekre vonatkozó kérdésre

Matematikai tétel(ek)	Szavazat (%)
Pitagorasz tétele	60
a $\sqrt{2}$ irracionális	52
Thalész tétele	31
Háromszög nevezetes vonalaival kapcsolatos tételek	26

A matematika tananyag tartalmi területei arányának megfelel a geometriai tételek túlsúlya mind a legfontosabbnak ítélt, mind az itt nem közölt kevésbé fontosnak minősített tételek körében. Megfigyelhető, hogy a bizonyítási képesség fejlesztése szempontjából fontosnak ítélt tételek köre nem feltétlenül azonos a feladatmegoldások során gyakran felhasznált tételekkel. Ez nyilvánvaló a $\sqrt{2}$ irracionalitása tétel kapcsán, amelyet a feladatmegoldások során nem kell felhasználni. Ugyanakkor a geometriai tételek között több igen gyakran alkalmazott állítás a bizonyítási képesség fejlesztésének szempontjából kevésbé fontosak közé tartozik: pl. az addíciós tételek, a magasság- és a befogótétel stb.

Külön érdekességet rejt magában annak elemzése, hogy a kérdőíven a három tétel között melyik hányadik helyen bukkant fel leggyakrabban. Bár a megnevezett három matematikai tétel sorrendjére vonatkozóan nem szerepelt semmiféle kitétel, okkal feltételezhetjük, hogy jelentősége lehet annak, ha egy tétel rendszeresen a legelső helyen bukkant fel a kérdőíveken. A Pitagorasz-tétel például a 39 eset közül 29-szer a legelső helyen bukkan fel a tételek listáján. Egy másik „elsőhelyes" tétel a háromszög belső szögeinek összegét kimondó. Bár ez a tétel mindössze öt szavazatot kapott, mind az ötöt úgy, hogy a legelső helyen szerepelt.

A következő kérdés arra vonatkozott, hogy a matematikatanárok szerint a tanulóknak hány éves korban kell először indirekt bizonyítással találkozniuk. A válaszok meglehetősen egyöntetűek voltak: az átlag 15,02 lett, a szórás mindössze 1,25. A leggyakoribb válasz a 15 éves kor volt (24-en jelölték meg ezt az életkort, ami 38%), a 14 éves kor 12 (19%), a 16 pedig 15 (23%) szavazatot kapott. Mivel erre a kérdésre összesen 64 válasz érkezett, a három életkorra esett a válaszok mintegy 80%-a:

Az indirekt bizonyításokkal kapcsolatos pedagógiai-pszichológiai megállapításokat az elméleti alapok között tárgyaltuk. Az indirekt bizonyítások alkotásának egyik szükséges feltétele a körben forgó okoskodás elkerülése. Egy másik szükséges feltétel állítások tagadása megfogalmazásának képességét emeli ki. Bármelyik feltételt is tekintjük, nyilvánvaló és kutatási eredményekkel is alátámasztható, hogy az indirekt bizonyítások iskolai bevezetése csak a serdülőkor közepe-vége felé indokolt. Nem arról van szó, hogy annak előtte a tanulók ne tudnának indirekt bizonyítási gondolatmeneteket produkálni; valójában a modus tollens szabály alkalmazása is annak tekinthető. Azonban indirekt bizonyításokat formalizálni, a levezetésükhöz szükséges verbális kifejezéseket elsajátítani nehéz feladatnak számít.

Az előzőhöz is kapcsolódó, de tantervtörténeti szempontból is érdekes volt a következő kérdésünk, amelyben arra voltunk kíváncsiak, hogy a matematikatanárok szerint a tanulóknak hány éves korban kell tudniuk megfordítani Pitagorasz tételét. Az 1978-as tanterv már az általános iskola 7. osztályában követelményként fogalmazza meg, hogy a tanulók „ismerjék és tudják alkalmazni Pitagorasz tételét és a megfordítását." (Az általános iskolai nevelés és oktatás terve, 1981, 611. o.) Ezzel szemben a Nemzeti alaptanterv (1995) néhány egyszerű matematikai állítás megfordítását tűzi ki célként a 9-10. évfolyam végére.

Az empirikus válaszgyakoriságokra az előző kérdéshez hasonlóan az jellemző, hogy a 14, a 15 és a 16 éves kort írták a legtöbben; rendre 15, 20 illetve 11 válaszadó, akik az összes válaszadó (N=62) 74%-át képviselik. Az átlagérték 14,60 lett, a szórás pedig 1,99.

A bizonyítások tanításának életkori sajátosságihoz kapcsolódó két kérdés esetében az átlagok különbsége 0,42, ami az iskolai naptárat figyelembe véve nem releváns különbség. Matematikai statisztikai szempontból az elvégzett páros t-próba alapján azt mondhatjuk, hogy a különbség valóban nem jelentős ($t=1,84$, $p=0,07$). A két kérdésre kapott válaszokat úgy összegezhetjük, hogy a matematikatanári kérdőívet kitöltők szerint az indirekt bizonyítások bevezetésének és egy nevezetes matematikai tétel megfordításának nagyjából egy iskolai évben kell sorra kerülnie. A tanulók életkora szerint a 15 éves kor a legmegfelelőbb, ami a jelenlegi iskolarendszerben a többség számára a középiskola 1. évfolyamát jelenti.

A matematikatanári kérdőív harmadik részében két - a tanulók „Bizonyítási feladatok" tesztjében is előfordult - matematikai állítás, és az azokhoz tartozó öt-öt bizonyítás szerepelt. A tanárok feladata ugyanaz volt, mint a diákoké: ötfokozatú skálán kellett osztályozniuk a bizonyításokat. Az egyes bizonyításokra a következő átlagok születtek:

56. táblázat. Bizonyítástípusok értékelése a nagymintás mérés matematikatanári kérdőíve alapján

Feladat	Bizonyítástípus	Átlag	Szórás
„háromszög belső szögei"	tekintélyelvű	1,17	0,45
	rituális	1,18	0,53
	szimbolikus	1,22	0,60
	empirikus	1,38	0,52
	deduktív	4,82	0,39
„3 páratlan szám szorzata"	tekintélyelvű	1,40	0,75
	rituális	1,50	0,67
	szimbolikus	2,21	1,37
	empirikus	1,61	0,75
	deduktív	4,63	0,73

Az egyik következtetés, amit a táblázat adataiból rögtön levonhatunk, hogy a matematikatanárok szigorúak a matematikai bizonyítások értékének megítélésében. A deduktív bizonyítás mindkét esetben kimagasló átlagot kapott, a többi típus jóval lemaradt mögötte. A két állítás közötti különbségek olyan módon fejeződnek ki az eredményekben, hogy a második állításhoz kapcsolódó bizonyítások értékelésénél nagyobb a szórás, ami azzal magyarázható, hogy a szóban forgó állítás ebben a formában nem része a megtanulandó törzsanyagnak. A nem-deduktív bizonyítások alacsony átlagai mögött azonban számtalan tényező hatása rejtőzhet.

Adott változórendszerben a rejtett háttérváltozók felderítésére alkalmas módszer a faktoranalízis. A faktoranalízis elvégzése gyakran eredményezi azt, hogy az eredeti változók számához képest kevés faktor keletkezik, és ugyanakkor a változóinkat egyértelműen egy-egy faktorhoz lehet rendelni a kapcsolat szorossága alapján. Konkrét esetünkben az volt a faktoranalízis célja, hogy felderítsük, a két matematikai állítás esetében megadott öt-öt bizonyítás a tanári értékítéletek alapján hány darab, egymástól lényegesen különböző faktorba sorolható. A faktoranalízis főkomponens-analízisét alkalmazva, a varimax rotációs eljárással az 1 fölötti sajátértékkel rendelkező faktorokat meghatározva, a következő faktorsúlyok adódtak:

57. táblázat. A matematikatanári kérdőív bizonyításaihoz rendelhető változók faktorsúlyai - faktoranalízis főkomponens-analízissel, 1 sajátérték fölötti faktorokkal és varimax rotációval

	1. faktor	2. faktor	3. faktor	4. faktor
„Háromszög” - tekintélyelvű	0,55930	-0,05980	-0,05110	-0,55495
„Háromszög” - empirikus	-0,00606	0,03890	0,90077	0,15736
„Háromszög” - szimbolikus	0,06960	0,79869	0,32993	0,03243
„Háromszög” - rituális	0,07243	0,85818	-0,27972	0,07389
„Háromszög” - deduktív	0,20909	0,33230	0,19901	-0,09855
„Páratlan” - rituális	0,79701	0,05060	0,09626	-0,16864
„Páratlan” - tekintélyelvű	0,86222	0,15642	-0,19294	0,08190
„Páratlan” - szimbolikus	0,06112	0,47058	0,51717	-0,54516
„Páratlan” - empirikus	0,71254	0,24599	0,39192	0,26321
„Páratlan” - deduktív	0,06693	0,03015	0,13344	0,80833

A faktoranalízis alapján nehezen interpretálható faktorokat kaptunk. 0,3-es faktorsúly-határt rögzítve a szürkített cellák jelölik a 0,3-nél magasabb értékeket. A teljes egyértelműséggel besorolható változók közül a „3 páratlan szám szorzata páratlan” állításra adott, matematikai jelekkel nem formalizált deduktív bizonyítás a 4. faktorba tartozik. A matematikatanárok véleménye alapján legkevésbé értékes bizonyítások az 1. faktorba kerültek. A 3. faktor a matematikai szempontból viszonylag egyszerűen konstruálható bizonyítások faktorának tekinthető, míg a 2. faktor a matematikai jelölések szempontjából „legformalizáltabb” bizonyítások faktora lehet. A faktorok interpretációjánál és az egyes bizonyítások besorolásánál fontosabbnak tarthatjuk azonban azt, hogy a matematikai bizonyítások matematikatanári megítélésében több olyan értékelési kritérium fedezhető fel, amelyek azt mutatják, hogy a bizonyítások értékelése nem 0-1 pontozású itemek kimérését jelenti. Ennek jelentőségének alátámasztására az EARLI (European Association for Research on Learning and Instruction) pedagógiai értékelési szakcsoportjának (Assessment and Evaluation Special Interest Group) maastrichti 1. konferenciáján hangsúlyozott elvet emelem ki (Dochy és Dierick, 2000), mely szerint a jövő század pedagógiai értékelésében főszerep jut a magasabb szintű kognitív képességek szakértők egyetértésén alapuló értékelésének.

3.2.8. Összefüggések néhány háttérváltozóval

A háttérváltozókkal való összefüggések vizsgálatánál - a tesztek belső összefüggésrendszerének elemzéséhez hasonlóan - szigorú szelekcióra kényszerülünk. Az előfelmérés során már több érdekes kapcsolatot feltártunk a bizonyítási feladatokon nyújtott teljesítmény és egyes háttérváltozók között. A nagymintás mérés háttérváltozóival fennálló kapcsolatok elemzése során több „negatív" eredményre bukkantam. Úgy vélem azonban, a szignifikáns kapcsolat hiányának kimondása egy feltételezett szoros kapcsolat esetén hasonló tudományos értékkel bír, mint egy nem várt összefüggés kimutatása.

Nemek közötti különbségek

A deduktív gondolkodás területén az eddigi külföldi kutatások általában nem mutattak ki jelentős különbségeket (ld. Meehan, 1984). Ha tehát lényeges különbség adódik valamelyik feladatban vagy a bizonyítási képesség mérőszámában, akkor az nagy valószínűséggel nem írható az algoritmikus gondolkodási komponensek számlájára. Ha a különbség egyáltalán a kognitív szférára vezethető vissza, akkor a stratégia-szint komponenseinek különbségében lehet a magyarázat. A stratégia-szintbe beépült modellek ugyanakkor már nagymértékben szocio-kulturális képződmények, amint ezt korábban kifejtettük.

A nemek közötti különbségek vizsgálatát az általános iskolai mintákra korlátozzuk, mert középiskolákban a szelekciós mechanizmusok miatt felborul a fiú-lány arány. Ugyanakkor 5. osztályban még nem képezhettünk az összehasonlítás alapjául alkalmas mérőszámot. Hetedik osztályban a bizonyítási képesség mérőszámának átlaga a fiúk esetében 4,69, a lányok mintáján 5,15. A szórások egyezőek (Levene's F=0,47, p=0,50), így elvégezhető volt a kétmintás t-próba, amely szerint az átlagok között nincs szignifikáns különbség (t=1,31, p=0,19).

Összefüggések a szülők iskolai végzettségével

Több évtizede ismertek olyan kutatási eredmények, amelyek bizonyítják, hogy összefüggés van a gyermek iskolai teljesítménye és a szülei iskolai végzettsége között. A kutatások főleg az anyai iskolai végzettségének meghatározó szerepét emelik ki. Két kérdést teszünk föl a jelenlegi kutatásban: 1) Milyen szoros korreláció van a szülők iskolai végzettsége és a bizonyítási képesség mérőszáma között? 2) Melyik szülő iskolai végzettsége a meghatározóbb?

Az első kérdésre a korrelációs együtthatók kiszámolásával válaszolhatunk:

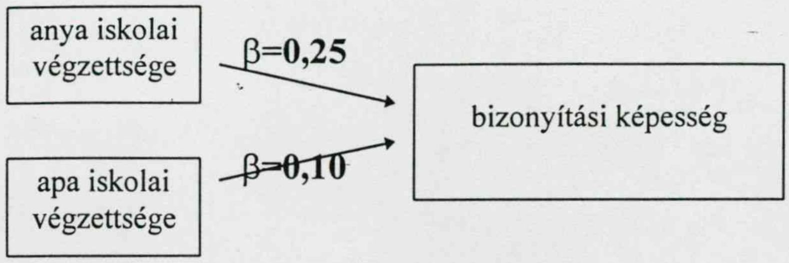
58. táblázat. Korrelációk a bizonyítási képesség mérőszáma és a szülők iskolai végzettsége között

Részminta	Anya iskolai végzettsége	Apa iskolai végzettsége
5. osztály	0,17	0,12
7. osztály	0,32	0,28
9. gimnázium	0,09	0,08
9. szakközépiskola	0,13	0,10
11. gimnázium	0,20	0,27
11. szakközépiskola	-0,05	-0,08

A táblázat adatai első látásra hihetetlen változékonyságot mutatnak. A 11. évfolyamos szakközépiskolások felvetődik az a lehetőség, hogy nagyon sokan nem valós adatokat adtak meg. Ilyen jelenségről beszámoltak már a Monitor '95 szervezői is (*Vári*, 1997)

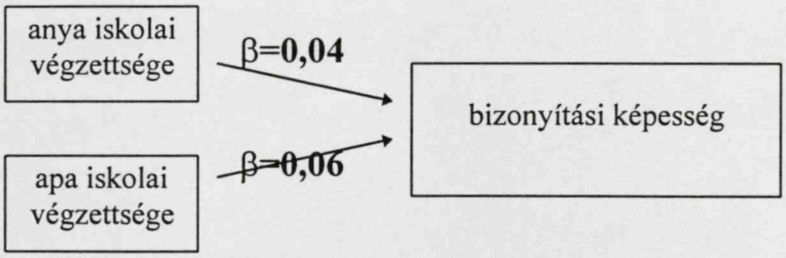
Az iskolai teljesítmény és a szülői iskolai végzettségek közötti összefüggések szorosságáról korábban született adatok szerint a középiskolában általában alacsonyabbak a korrelációs együtthatók. A szülők iskolai végzettségének együttmozgása kifejezi azt a tényt, hogy általában nagyon szoros összefüggés szokott lenni a szülők iskolai végzettsége között.

Éppen emiatt a szoros összefüggés miatt nem tudjuk az előző táblázat adatai alapján megmondani, melyik szülő végzettsége meghatározóbb. A regresszióanalízis során kapott path-koefficiensek segítségével kiszűrhető az a közvetítő hatás, amely a szülők iskolai végzettsége közötti szoros korrelációból adódik.



14. ábra. A bizonyítási képesség egy regressziós modellje és a path-koefficiensek 7. osztályban

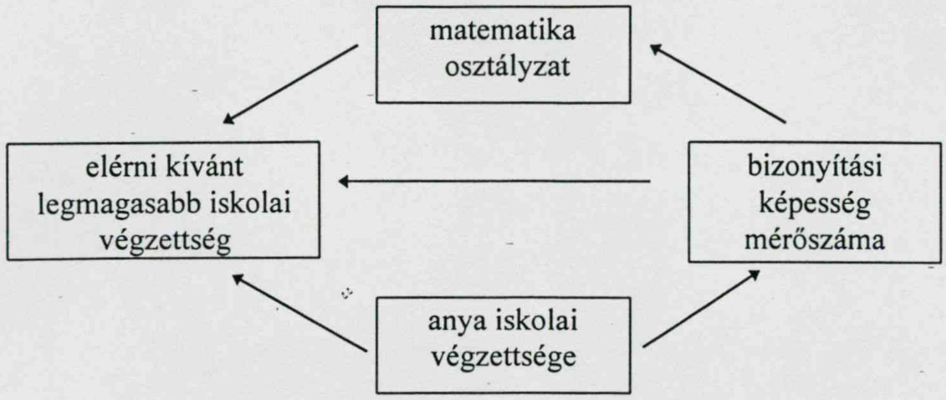
A modell determinációs együtthatója 0,11, vagyis a két szülő iskolai végzettsége együtt a bizonyítási képesség varianciájának 11%-át megmagyarázza 7. osztályban. A path-koefficiensek szerint a bizonyítási képesség fejlettsége szempontjából az anya iskolai végzettsége nagyobb jelentőségű, mint az apáé.



15. ábra. A bizonyítási képesség egy regressziós modellje és a path-koefficiensek a 9. osztályos gimnazisták körében

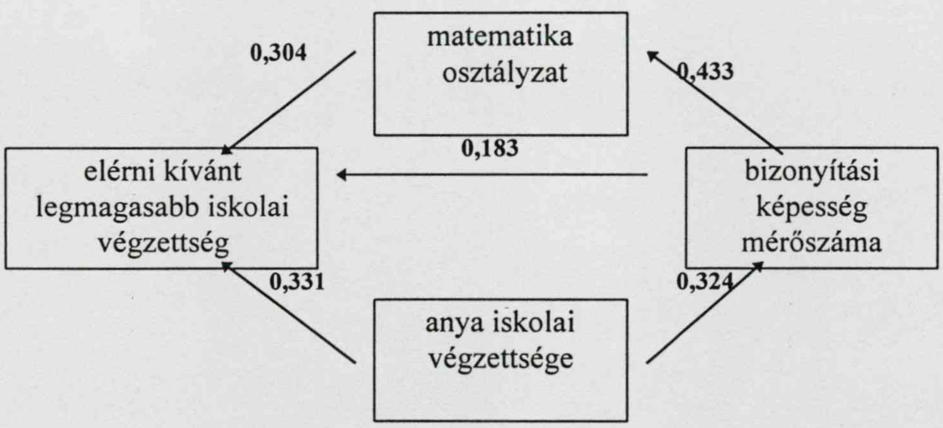
A modell determinációs együtthatója 0,01, vagyis mindössze 1%-át tudja megmagyarázni a bizonyítási képesség mérőszáma varianciáját a szülők iskolai végzettsége a 9. évfolyamos gimnazisták részmintájában.

A bizonyítási képesség pedagógiai szempontból értelmezett fontosságát alátámaszthatja egy olyan modell, amelyben a bizonyítási képesség mérőszáma fontos szerepet játszik az iskolai teljesítmény szempontjából jelentős változók varianciájának megmagyarázásában. A következő modellben két ilyen változót szerepeltettünk, a matematika osztályzatot és az elérni kívánt legmagasabb iskolai végzettséget. Mivel a szülők iskolai végzettsége - ezen belül elsősorban az anyáé - bizonyítottan jelentős szerepet játszik az iskolai teljesítményben, a következő modellben azt is szerepeltettük:



16. ábra. A path-analízis alapjául szolgáló modell

A modellünkben feltüntetett nyilak oksági kapcsolatokat jelölnek. Természetesen tudjuk, hogy gyakran nem irányú kapcsolatról, hanem oda-visszahatásról van szó. A path-analízis arra alkalmas, hogy kimutassuk, ha egy okságinak feltételezett kapcsolat valójában csak összefüggések láncolatának műterméke (*Tacq*, 1997).



17. ábra. Path-koefficiensek a bizonyítási képesség mérőszáma és néhány változó között 7. osztályban

A path-koefficiensek szerint a bizonyítási képesség mérőszáma a másik két változóhoz képest kisebb hatással van a továbbtanulási szándékra. Ez nem meglepő, mivel a továbbtanulási szándék a családi-kulturális környezet hatásai mellett tanuló számára ismertté vált iskolai eredményektől függ elsősorban.

Tantárgyi osztályzatok és a bizonyítási képesség

A bizonyítás-fogalom szorosan kötődik a matematikához, ezért érdemes megvizsgálni, hogy valóban a matematika osztályzat áll-e a legszorosabb kapcsolatban a bizonyítási képesség mérőszámával. Mivel az osztályzatok rendkívül szoros belső összefüggésrendszerrel rendelkeznek (ld. *Csapó*, 1998; *Csíkos* és *B. Németh*, 1998) a legcélravezetőbb módszer a regresszió-analízis lehet.

Lineáris többszörös regresszióanalízist végeztünk a bizonyítási képesség mérőszáma mint függő változó és az adatlapon szereplő tíz tantárgyi osztályzat mint független változók bevonásával. A hiányzó adatok kezelésére a list-wise esetkizárást alkalmaztuk, tehát csak a tanulók szerepelnek az eredményekben, akiknek mind a tíz tantárgyból volt osztályzatuk.

Illusztrációképpen bemutatjuk a 7. osztályosok esetében tapasztalt path-koefficienseket.

59. táblázat. Lineáris többszörös regresszióanalízis eredményei 7. osztályban

Függő változó: bizonyítási képesség mérőszáma	Path-koefficiens	szignifikancia (p)
matematika osztályzat	0,11	0,26
fizika osztályzat	0,13	0,24
számítástechnika osztályzat	0,18	0,02
kémia osztályzat	0,04	0,69
biológia osztályzat	0,02	0,83
földrajz osztályzat	0,05	0,56
nyelvtan osztályzat	-0,04	0,73
irodalom osztályzat	0,12	0,22
történelem osztályzat	-0,01	0,91
idegen nyelv osztályzat	-0,02	0,85

A táblázat értelmezéséhez feltétlenül tudni kell, hogy a tantárgyi osztályzatok nagyon szoros belső összefüggésrendszerrel rendelkeznek. Ennek köszönhető, hogy a path-koefficiensek között csak egyetlen szignifikáns van: a számítástechnika osztályzaté. Ez egyben arra is felhívja a figyelmet, hogy amennyiben egy újabb tantárgy osztályzatát vennénk föl a független változók közé, vagy elhagynánk egyeseket, jelentősen módosulhatna a path-koefficiensek rendszere. A számítástechnika osztályzat szignifikáns hozzájárulása a bizonyítási képesség mérőszáma megmagyarázott varianciájához megerősítheti azt az álláspontot, mely a bizonyítási képesség fejlesztésének PTD-modelljeiben a „számítógépes terület-felderítést" preferálja.

A többi évfolyamon született eredmények összegzéseképpen elmondhatjuk, hogy valóban annyira szoros az osztályzatok belső összefüggésrendszere, hogy nincs egy kitüntetett tantárgy, amely több évfolyamban is a legmagasabb path-koefficienssel rendelkezik. Talán tanulságos lehet mégis, ha megjegyezzük, a 9. osztályos gimnazista csoportban a fizika, a 11. osztályos gimnazisták körében pedig a nyelvtan és a fizika együtthatója bizonyult szignifikánsnak.

Matematika teszteredmények és a bizonyítási képesség

A háttérváltozókkal meglévő kapcsolatok elemzésében helyet kell kapnia a matematika tantárgyi tudásszintmérőn elért eredményekkel megfigyelhető kapcsolatok bemutatásának is. Miután kimutattuk, hogy a bizonyítási képesség valamennyi tantárgyi osztályzattal - így a matematikáéval is - szorosan korrelál, hipotézisünket a matematika teszteredménnyel vett korrelációról az alapján állítottuk föl, hogy eddigi eredményeink szerint (ld. Csapó, a matematika tantárgy esetében különösen szoros kapcsolat mutatkozik a tantárgyi osztályzat a teszttel mért tudásszint között.

Valamennyi vizsgált részmintán szignifikáns pozitív korrelációk adódtak a bizonyítási képesség mérőszáma és a matematika teszten elért eredmény között. A korrelációs együtthatók nagyságát összehasonlítva a bizonyítási képesség mérőszáma és a matematika osztályzat között tapasztalt értékekkel, egyik esetben sem találtunk szignifikáns eltérést; sőt, a korrelációs együtthatók közötti különbség előjele sem volt egyforma minden részmintán.

A matematika osztályzat és a matematika teszteredmény közötti korreláció a hetedikesek és a kilencedikes gimnazisták részmintáján szignifikánsan magasabb volt, mint a bizonyítási képesség mérőszáma és az előbbi két változó közötti korrelációk. Ez összhangban van azzal a megfigyelésünkkel, hogy a bizonyítási képesség fejlődésmenetében van egy nehéz lépcsőfok (az empirikus és szimbolikus bizonyítások értékességének megítélésével kapcsolatban), amelyre ezekben a populációkban a jobb tanulmányi eredményű tanulóknak nehéz fellépniük.

3.2.9. A feladatmegoldás folyamatának rejtett komponensei: a szóbeli interjúk eredményei

A nagymintás mérés mérőeszközeinek validitásával kapcsolatban felmerült problémák, továbbá olyan kutatási kérdések, amelyek megválaszolásához nagyon nehéz papír-ceruza tesztben feltehető kérdéseket szerkeszteni, szóbeli interjúk elkészítését inspirálták. Az interjú-protokoll leírása megtalálható a módszerekről szóló fejezetben. A következőkben az interjúk során elhangzó tanulói válaszok elemzését végezzük el. (Az összességében 24 fős minta ugyanakkor már megenged leíró statisztikai elemzéseket. *Wason* és *Johnson-Laird* (1970) világhírű vizsgálatában például 21 pszichológia szakos hallgató által elért eredményekből született meg az emberiség gondolkodásának egyik modellje.) Az objektivitás ugyanakkor megkívánja, hogy ne egy előre kidolgozott koncepcióhoz keressünk hozzáillő idézeteket, hanem a szóbeli interjúkat életre hívó problémák mentén haladva igyekezzünk az előfordult karakterisztikus véleményeket bemutatni. Az alábbi problémákkal foglalkoztunk kiemelten:

- Milyen feladatmegoldási stratégia volt jellemző a feleletválasztó feladatokban: Az opciókon egyesével végighaladás vagy egy globálisabb értékelési stratégia?
- Az állítás nyilvánvalósága és a bizonyítás szükségszerűsége közötti összefüggésekről szóló kérdésekben mi a magyarázata egyes furcsa válaszmintázatoknak (pl. az állítás sokak számára nem nyilvánvaló, és ezért nem kell bizonyítani...)?
- Hogyan helyeznek el az ötfokozatú értékelési rendszerben egy olyan választ, amely jelentősen különbözik a tesztlapon szereplő többi opciótól?
- Mi a véleményük egyes feladatokról? Hogyan lehetne szerintük javítani a egy-két feladat szövegezését?

A feleletválasztásos feladatok megoldási stratégiájával kapcsolatos kérdésre a többség azt válaszolta, hogy először az összes opciót elolvasta, és csak utána kezdett hozzá az osztályozáshoz. Ezen belül néhányan kifejezetten ügyelnek arra, hogy minden osztályzatot egyszer osszanak ki. Volt, aki a matematikatanárokra jellemző értékelési stratégiát követett.

Ákos (12. osztály): *„Matematika és számítástechnika irányultságom van valamennyire, és úgy tanítottak, hogy ha valami helyes, akkor az helyes, ha nem, akkor pedig nem. Végül is kétféle osztályzatot lehetett volna adni: az egyest és az ötöst."*

Úgy vélem, a feladatmegoldási folyamat ezen meta-összetevőinek vizsgálata elhanyagolt, és érdemes lenne több figyelmet fordítani rá.

A feleletválasztó feladatokhoz kapcsolódott egy-egy kérdés az állítás nyilvánvalóságának és a bizonyítás szükségességének kapcsolatáról. Korábban említettük, hogy ezek a kérdések formai hibával terhesek, de ezen túlmenően is probléma van velük, amint azt az interjúk megmutatták. Az egyik 12. osztályos tanuló így fogalmazta meg a problémát:

Ilona (12. osztály):*„Ezt úgy értelmeztem, hogy először feltétlenül bizonyítani kellett, és azért lett nyilvánvaló."*

Másoknak gondot okozott az „állítás" értelmezése ebben a kontextusban. Többen úgy vélték, az állítások itt a bizonyítási opciókra, és nem a bizonyítandó állításra vonatkoznak.

Az „ég-e a városháza?" feladatban az előfelmérések során találkoztunk azzal a meglepő és bátor válasszal, hogy azért nem ég a városháza, mert ez egy képzeletbeli város. Az interjú során azt kértem a tanulóktól, hogy értékeljék ezt a válaszlehetőséget is ötfokozatú skálán. A válaszok meglehetősen egybehangzóan értékesnek minősítették ezt az opciót is. A beszélgetés fonala innen vezetett annak megvitatásához, hogy vajon több lehetséges jó válasz esetén mennyire meghatározó a tanulók szerint, hogy a tanár milyen választ vár el. Katalin, az egyik 8. osztályos tanuló még nem igazán tudta formába önteni ezzel kapcsolatos gondolatait, de érezhető válaszában a kontextuális hatások tudatos figyelembe vételére törekvés.

Katalin: *„Igazuk van, a tűzzel nem lehet viccelni szerintem."*
Cs. Cs.: *És miért csak kettest adtál rá?*
Katalin: *„Hát mert ... végül is ez nem az igazi bizonyítás szerintem."*
Cs. Cs.: *„Honnan lehet tudni, hogy melyik lehet itt az igazi?"*
Katalin: *„Ez igaz, hogy a tűzzel nem lehet játszani, de ez nem elég bizonyítás arra"* ... *„Legelőször, mikor ezt elolvastam, arra gondoltam, hogy bonyolultabb választ kell erre adni."*

Tizedik osztályos tanulók élesebben és egyértelműen fogalmaztak:

Kitti: *„A tanulónak ki kell találnia, hogy milyen típusú válaszra van szükség."*

Emese: *„Ha adnak egy feladatot, akkor azt valószínűleg nem azért adják, hogy ez most képzeletbeli, vagy nem képzeletbeli..."*

A feladatok meta-szintű elemzésének jelenlétét bizonyították a lovagok-lókötők témájú feladatok átszövegezésére tett javaslatok. Egyes esetekben ugyan egy percet is várni kellett az interjúk során, míg válaszolt a tanuló, de többen is javaslatot tettek a lovagos-lókötős feladatok tartalmának megváltoztatására. A vélemények egyik pólusa szerint hétköznapibb, könnyebben elképzelhető dolgokat kellett volna szerepeltetni. Mások ismert meseelemekre szavaztak, és voltak, akik szerint csak a lókötőket kell kicserélni, a lovagok maradhatnak. Ez összhangban van azzal az észrevételünkkel, amelyet a modus ponens feladat kapcsán tettünk, amikor is a váratlanul gyenge eredmények egyik okaként jelöltük meg, hogy talán sokan nem tudták elképzelni, hogy lókötők virágot vigyenek lovagoknak.

Ákos (10. osztály, a lovagokról-lókötőkről) : *„Minden ilyen jellegű feladat direkt úgy van szövegezve, hogy zavaró legyen., de egy idő után meg lehet szokni. ... Annyi az egész, hogy egy kicsit jobban kell összpontosítani a feladatra."*

Az interjúk elkészítéséből származó fontos eredmény, hogy a 6. osztályos tanulók sok esetben felülbírálták egy évvel azelőtti döntéseiket. A többi évfolyamon ezt sokkal kisebb mértékben lehetett tapasztalni. A legszembetűnőbb változás a tekintélyelvű bizonyításokkal kapcsolatos vélemény megváltozása. Dániel (6. osztály) például a „gömbölyű Föld" feladatban a tesztlapon ötöst adott a tekintélyelvű bizonyításra. Egy évvel később már csak a hármast tartotta elfogadhatónak erre a válaszlehetőségre.

Összegzés

Dolgozatomban a bizonyítási képesség fejlődését igyekeztem feltérképezni a 10-17 éves életkori szakaszban. A bizonyítási képesség értelmezése egyrészt a képességkutatás legújabb eredményeinek figyelembevételét, másrészt egy pedagógiai-pszichológiai képesség-fogalom meghatározását igényelte. Ebből adódóan a bizonyítási képességet többszintű, hierarchikus képesség-rendszerként értelmeztük, amelynek egy szintje szorosan köthető a deduktív gondolkodás képességéhez. Hangsúlyt fektettünk a bizonyítási képesség értelmezésében az evolúciós-kulturális meghatározottságra és a kontextuális hatásokra is.

A bizonyítási képesség esetén két fontos al-komponensrendszerről beszéltünk: 1) a bizonyítások értékelésének képessége és 2) a bizonyítások konstruálásának képessége. Az első alrendszer mérésére zárt végű feladatokat, a második alrendszer értékelésére nyílt végű feladatokat használtunk. A feladatmegoldással kapcsolatban elemeztük a kontextus szerepét.

Eredményeink szerint a bizonyítási képesség mérésére szolgáló tesztfeladatokon nyújtott teljesítmények egy képesség jellegű tudásrendszer létezését mutatják. Ez a képesség - amelyet a teszt validitásának igazolása után bizonyítási képességnek nevezhetünk - tartalmak széles körén hasonlóan működik.

Kismintás mérésünk bizonyította, hogy az egyes bizonyítástípusok megítélésében a tanulók értékítélete azzal egyezik meg, amit ők a tanáraiknak tulajdonítanak. Ez az eredmény kiemelt fontosságot biztosít a tanári értékítélet elemzésének. Valószínű, hogy az értelem nélküli szimbólum-manipuláció azért értékes sok tanuló szemében, mert a matematikatanárok értékítéletében az empirikus bizonyítások gyakran a szimbolikus bizonyításoknál is alacsonyabb szinten állnak.

Az a törekvésünk, hogy a bizonyítási képesség fejlettségének jellemzésére egyetlen számadatot rendeljünk, megbízható és érvényes teszt segítségével, felemás eredménnyel járt: sikerült tesztelméleti szempontból jól viselkedő mutatót kifejlesztenünk, de az ezzel kapott eredmények interpretálása nem egyszerű. A háttérben minden bizonnyal az a jelenség áll, hogy a bizonyítási képesség egyes komponensei többféle tartalmon azonosan működnek, más komponensei viszont inkább a tartalom-specifikus *készség* fogalommal írhatók le.

A 2. fejezetben említett kutatási hipotézisekről az eredmények alapján a következőket mondhatjuk:

- Az általunk alkotott pedagógiai-pszichológiai bizonyításfogalom a filozófiai, matematikai és jogi bizonyítás-fogalmakra épül. Kellően általános ahhoz, hogy ne kelljen megkötéseket tenni a tartalomra vonatkozóan, ugyanakkor kellően specifikus ahhoz, hogy a pedagógia számára fontos és alapvető jelenségek leírására fölhasználható legyen.
- A képességkutatás legújabb eredményeivel összhangban hierarchikus képességmodellünk példa lehet arra, hogyan lehet számos jelenséget egy képességrendszerre visszavezetni az elemi, hétköznapi következtetésektől kezdve egy bonyolult matematikai tétel bizonyításáig a képesség-nevezéktan elburjánzása nélkül.
- A bizonyítási képesség mérésre kidolgozott tesztjeink méréselméleti szempontból megfelelőnek bizonyultak. Az alkalmazott feladatok rendszere az empirikus jellemzők alapján alkalmas a bizonyítási képesség komponenseinek mérésére.
- A bizonyítási képesség fejlődésének leírásában két fontos tényezőt emelünk most ki: 1) a képességteszt feladatain nyújtott teljesítmények közötti korrelációk szorosabbá válása a fejlődés egyik indikátora lehet. 2) a bizonyítási képesség mérőszámának alakulása egy olyan fejlődési görbét valószínűsít, amelynek legmeredekebb szakasza az általános iskola felső évfolyamaira esik.

- A matematika tantárgy fontos szerepet játszhat a bizonyítási képesség fejlesztésében, de eredményeink szerint ehhez a tanítási stratégiák átalakulása mellett a matematikatanárok bizonyítás-értékelésének is változásra van szükség.

Számos további hipotézist megvizsgáltunk, és azok alapján a képességkutatás és a pedagógiai értékelés általános elmélete számára különösen tanulságosak lehetnek a következő eredményeink:

- A többszintű képességmodellek elmélete alapján a képességek fejlődésének jellemzésére a teszten elért számszerű eredmény mellett szükség van a metakognitív elemek mérésére is.
- A feladatmegoldás kontextusa jelentős mértékben befolyásolja az eredményeket.
- Megmutattuk, hogy a bizonyítási képesség mint magasabb rendű kognitív képesség mérése során a 0-1 pontozású dichotóm pontozás helyett többértékű, az elméleti modellekre építkező és szakértők véleményének egyetértésén alapuló értékelés lehet célravezető.

Az iskolai tanítás-tanulás gyakorlata számára kutatásunk fontosabb eredményei:

- A tekintélyelvű érvelések, amelyek fontos szerepet töltenek be a gyermeki gondolkodás alakulásában, 10 éves kor táján nagyon gyorsan veszítenek értékükből a tanulók szemében. Ez nagyon nagy mértékben az iskola hatásának tudható be.
- Az értelem nélküli szimbólum-manipuláció valamennyi évfolyamon túlértékelt. A matematika tantárgynak fontos szerepe lehet abban (a PTD-modellek szellemében), hogy az empirikus bizonyítások értékét megemeljük. Ennek egy gyakorlati formája lehet, hogy univerzális kvantort tartalmazó állítások esetében konkrét példákkal alátámasztjuk, hogy az állítás igaz.
- Eredményeink alapján valószínűsíthető, hogy a tanulók a bizonyítások értékelése során kész modellekhez, sémákhoz viszonyítanak. Ezek a sémák az iskolai gyakorlatban alapvetően matematikai témákhoz kötődnek. A többszintű képességmodellek alapján nagyon fontos, hogy a bizonyításokkal kapcsolatban a gondolkodás meta-szintjén működő tanulói modellek alakuljanak ki.
- Egyértelmű kapcsolat van a tartalom ismertsége és az adott tartalmú állításokra adott bizonyítási stratégiák között. A természettudományos oktatás számára fontos annak figyelembe vétele, hogy a tanulók a hétköznapi életből ismert jelenségek esetén - még akkor is, ha nincsenek birtokában a szükséges ismereteknek - deduktív bizonyítási stratégiákat alkalmaznak.

Köszönetnyilvánítás

A disszertáció alapjául szolgáló kutatások, a szakirodalmi háttér felderítése és a konkrét disszertációszöveg elkészítése során sok segítséget kaptam. Elsősorban köszönöm a doktori program vezetőinek, *Nagy Józsefnek, Vidákovich Tibornak, Csapó Benőnek* és *Cs. Czachesz Erzsébetnek*, valamint a doktorandusz kollégáknak a kutatási szemináriumokon megfogalmazott észrevételeket, kritikákat.

A kutatási projekteket, amelyekre a disszertáció épült, *Vidákovich Tibor* vezette. A kutatócsoportok tagjaként *Józsa Krisztián, Korom Erzsébet* és *Kontra József* segítette munkámat, az interjúk elkészítésében *Molnár Éva* segített. A tesztek végső formába öntése az Alapműveltségi Vizsgaközpont munkatársainak köszönhető.

A szakirodalmi háttér felderítésében mindenekelőtt *Vidákovich Tibor*nak és *Csapó Benő*nek tartozom köszönettel, akik ráirányították figyelmemet néhány jelentősebb tanulmányra. Egyes szakirodalmi tételekkel kapcsolatos kételyeim eloszlatását *Pléh Csabá*nak köszönöm. A külföldi kollégák közül *Leone Burton* hívta fel figyelmemet *Gila Hanna* munkáira, míg *Guershon Harel* több hónappal a megjelenés előtt elküldte a disszertációban sokszor említett (*Sowder*rel közösen írt) tanulmányát. *Chaim Tirosh*nak tartozom köszönettel a Balacheff-könyvfejezetért.

Köszönettel tartozom a mérésekben résztvevő iskoláknak, tanároknak és diákoknak. A disszertáció végső soron általuk és értük készült.

A disszertáció megírása során a Soros Alapítvány ösztöndíjasa voltam, akiknek nagyon köszönöm az anyagi támogatást.

Irodalom

Acredolo, C. és Horobin, K. (1987): Development of Relational Reasoning and Avoidance of Premature Closure. *Developmental Psychology, 23*, 13-21.

Almeida, D. (1995): Mathematics undergraduates'perceptions of proof. *Teaching Mathematics and its Applications, 14*, 171-177.

Altrichter Ferenc (1972, szerk.): *A Bécsi Kör filozófiája*. Gondolat Kiadó, Budapest.

Ambrus András (1993): Indirekt argumentációk, indoklások, bizonyítások az iskolai matematikaoktatásban. *Matematikatanár-képzés - matematikatanár-továbbképzés, 1*, 29-40.

Anderson, M. (1998): *Intelligencia és fejlődés*. Kulturtrade Kiadó, Budapest.

Andor Mihály és Liskó Ilona (2000): *Iskolaválasztás és mobilitás*. Iskolakultúra, Budapest.

Aquinói Szent Tamás (1994): *Summa Theologiae. Prima pars- A teológia foglalata. Első rész.* Telosz Kiadó, Budapest.

Artzt, A. F. és Armour-Thomas, E. (1998): Mathematics teaching as problem solving: A framework for studying teacher metacognition underlying instructional practice in mathematics. *Instructional Science, 26*, 5-25.

Astington, J. W. (1998): Theory of mind, Humpty Dumpty, and the Icebox. *Human Development, 41*, 30-39.

Az általános iskolai oktatás és nevelés terve (1978/1981). Országos Pedagógiai Intézet, Budapest.

Bacon, F. (1995): *Novum Organum - Új Atlantisz*. Nippon Kiadó, Budapest, 1995.

Balacheff, N. (1988): Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In: Pimm, D. (Ed.): *Mathematics, teachers, and children*, Hodder and Stoughton, London, 216-235.

Bánki M. Csaba (1996): *Az agy évtizedében*. Biográf Kiadó, 3. kiadás.

Barrett, M. (1995): Practical and ethical issues in planning research. In: Breakwell, G. M., Hammond, S. és Fife-Schaw, C. (szerk.): *Research methods in psychology*. SAGE Publications, London - Thousand Oaks - New Delhi, 16-35.

Barwise, J. (1977, szerk.): *Handbook of Mathematical Logic*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam-New York-Oxford.

Báthory Zoltán (1992): *Tanulók, iskolák - különbségek. Egy differenciális tanításelmélet vázlata*. Tankönyvkiadó, Budapest.

Battista, M. és Clements, D. H. (1995): Geometry and proof. *Mathematics Teacher, 88*, 48-54.

Bereiter, C., Hidi, S. és Dimitroff, G. (1979): Qualitative Changes in Verbal Reasoning during Middle and Late Childhood. *Child Development, 50*, 142-151.

Bernáth, János (szerk., 1978): *A történelem tanítása - gyakorlatok a történelemtanítás módszertanából*. Egységes jegyzet, Budapest.

Bettman, J. R., Johnson, E. J. és Payne, J. W. (1990): A componential analysis of cognitive effort in choice. *Organizational behavior and human decision processes, 45*, 111-139.

Bloom, L. és Capatides, J. B. (1987): Sources of Meaning in the Acquisition of Complex Syntax: The Sample Case of Causality. Journal of *Experimental Child Psychology, 43.*, 112-128.

Blum, W. és Kirsch, A. (1991): Preformal proving: examples and reflections. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 183-203.

Borwein, J., Borwein, P, Girgensohn, R. és Parnes, S. (1996): Making sense of experimental mathematics. *The Mathematical Intelligencer, 18*, 12-18.

Braine, M. D. S. (1978): On the Relation Between the Natural Logic of Reasoning and Standard Logic. *Psychological Review*, 85, 1-21.

Braine, M. D. S. (1990): The „Natural Logic" Approach to Reasoning. In: Overton, W. F. (Ed.): *Reasoning, Necessity, and Logic: Developmental Perspectives*. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey - Hove and London, 133-157.

Braine, M. D. S. és O'Brien (1991): A Theory of If: A Lexical Entry, Reasoning Program, and Pragmatic Principles. *Psychological Review, 98*, 182-203.

Butterworth (1993): Context and cognition in models of cognitive growth. In: Light, P. and Butterworth, G.: *Context and cognition*, 1-13., Erlbaum, Hillsdale, NJ.

Byrne, R. M. J. és Johnson-Laird, P. N. (1992): The Spontaneous Use of Propositional Connectives. *The* Quarterly *Journal of Experimental Psychology, 45A*, 89-110.

Byrnes, J. P. és Overton, W. F. (1988): Reasoning about logical connectives: A developmental analysis. *Journal of Experimental Child Psychology, 46*, 194-218.

Carroll, J. B. (1998): Matematikai képességek: A faktoranalitikus módszer néhány eredménye. In: Sternberg, R. J. és Ben-zeev, T. (szerk.): *A matematikai gondolkodás természete.* Vince Kiadó, Budapest, 14-37.

Cauzinille-Marméche, E. és Didierjean, A. (1998): Reasoning by analogy and memory for cases in the game of chess. In: Holyoak, K., Gentner, D. és Kokinov, B. (szerk.): *Advances in analogy research: Integration of theory and data from the cognitive, computational and neural sciences.* New Bulgarian University, Sofia.

Chazan, D. (1993): High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics, 24*, 359-387.

Cheng, P. W. és Holyoak, K. J. (1985): Pragmatic Reasoning Schemas. *Cognitive Psychology,.* 17 , 391-416.

Cheng, P. W., Holyoak, K. J., Nisbett, R. E. és Oliver, L. M. (1986): Pragmatic versus Syntactic Approaches to Training Deductive Reasoning. *Cognitive Psychology, 18*, 293-328.

Cosmides, L. (1989): The Logic of Social Exchange: Has Natural Selection Shaped How Humans Reason? Studies with the Wason Selection Task. *Cognition, 31*, 187-276.

Cosmides, L. és Tooby, J. (1996): Are humans good intuitive statisticians after all? Rethinking some conclusions from the literature on judgment under uncertainty. *Cognition, 58*, 1-73.

Csirikné Czachesz Erzsébet (1986): Gondolkodási Stratégiák 14 éves tanulók nyelvlogikai műveleteiben. *Magyar Pedagógia, 86*, 62-76.

Csirikné Czachesz Erzsébet (1987): A kétértékű logikai következtetések struktúrája és fejlődése 10-17 éves korban. *Acta Universitatis Szegediensis de Attila József Nominatae, Sectio Paedagogica, Series Specifica, 29*, 67-93.

Csapó Benő (1991): A gondolkodás műveleti képességeinek fejlesztése. *Új Pedagógiai Szemle, 41*, 4. sz. 31-40.

Csapó Benő (1992a): Improving operational abilities in children: results of a large-scale experiment. In: Demetriou, A., Shayer, M. és Efklides, A. (szerk.): *Neo-Piagetian Theories of Cognitive Development.* Routledge, London.

Csapó Benő (1992b): *Kognitív pedagógia.* Akadémiai Kiadó, Budapest.

Csapó Benő (1994): Az induktív gondolkodás fejlődése. *Magyar Pedagógia, 94* , 53-80.

Csapó Benő (1998, szerk.): *Az iskolai tudás.* Osiris Kiadó, Budapest.

Csapó Benő (1999): Az értelmi képességek fejlesztésének történelmi-társadalmi kontextusa. *Iskolakultúra*, 1999/9. sz. 3-15. o.

Csapó Benő, Cs. Czachesz Erzsébet és Vidákovich Tibor (1987): A nyelvi-logikai műveletrendszer fejlettsége 14 éves korban. *Pszichológia, 7*, 521-544.

Cser Andor (szerk.) (1972): *A matematikatanítás módszertanának néhány kérdése.* Tankönyvkiadó, Budapest.

Csibra Gergely, Gergely György és Nádasdy Zoltán (2000): Az oksági gondolkodás perceptuális alapjai. In: Pléh Csaba, Kampis György és Csányi Vilmos (szerk.): *A megismeréskutatás útjai.* Akadémiai Kiadó, Budapest, 52-74.

Csíkos Csaba (1996): *Implikatív következtetési rendszerek a 13 és 17 éves tanulók gondolkodásában.* Szakdolgozat. JATE Pedagógiai Tanszék, Szeged

Csíkos Csaba (1999a): Újabb eredmények a Wason-feladattal kapcsolatban. *Pszichológia, 19,* 5-27.

Csíkos Csaba (1999b): Iskolai matematikai bizonyítások és a bizonyítási képesség. *Magyar Pedagógia, 99,* 3-21.

Csíkos, Cs. A. (1999c): Measuring students' proving ability by means of Harel and Sowder's proof-categorization. In Zaslavsky, O. (Ed.): *Proceedings of the 23rd Conference of PME,* Haifa, Israel, vol2, 233-240.

Csíkos, Cs. A: (1999d, August): *Evaluation of students' proving ability by means of hierarchical and non-hierarchical proof-categorizations.* Paper presented at the 8th Conference of ERALI, Gothenburg, Sweden.

Csíkos és B. Németh (1998): A tesztekkel mérhető tudás. In: Csapó Benő (szerk): *Az iskolai tudás.* Osiris Kiadó, Budapest, 83-114.

Csíkos Csaba és Józsa Krisztián (1999, August): *What is needed more for good maths marks? Students' performance on plausible inference rule and vicious circle tasks.* Poster presented at the 8th Conference of EARLI, Gothenburg, Sweden.

Descartes, R. (1637/1992): *Értekezés a módszerről.* IKON Kiadó.

Dochy, F. és Dierick, S. (2000, September): *New lines in edumetrics: New forms of assessment lead to new assessment criteria.* Paper presented at the 1st Conference of the EARLI/SIG 'Assessment and Evaluation', Maastricht, The Netherlands.

Dreyfus, T. és Eisenberg, T. (1998): A matematikai gondolkodás különböző oldalairól. In: Stenberg és Ben-Zeev (szerk.): *A matematikai gondolkodás természete,* Vince Kiadó, Budapest,

Edwards, L. D. (1997): Exploring the territory before proof: Students' generalizations in a computer microworld for transformation geometry. International Journal of Computer for Mathematical Learning *2,* 3. sz. 187-215.

Edwards, L. D. (1998): Odds and evens: Mathematical reasoning and informal proof among high school students. *Journal of Mathematical Behavior.*

Emerson, H. F. és Gekoski, W. L. (1980): Development of comprehension of sentences with „because" or „if". *Journal of Experimental Child Psychology, 29,* 202-224.

Estes, D. (1998): Young children's awareness of their mental activity: The case of mental rotation. *Child Development, 69,* 1345-1360.

Evans, J. St. B. T. (1982): *The psychology of deductive reasoning.* Routledge and Kegan Paul, London, Boston and Henley.

Evans, J. St. B. T. (1990): Reasoning with knights and knaves: A discussion of Rips. *Cognition, 36,* 85-90.

Evans, J. St. B. T. (1992): Bias in thinking and judgement. In: Keane, M. T. és Gilhooly, K. J. (Eds.): *Advances in the psychology of thinking.* Volume One. 95-125.

Everson, H. T. és Tobias, S. (1998): The ability to estimate knowledge and performance in college: A metacognitive analysis. *Instructional Science, 26, 65-79.*

Eysenck, M. W. és Keane, M. T. (1997): *Kognitív pszichológia.* Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest

Falmagne, R. F. (1990): Language and the Acquisition of Logical Knowledge. In: Overton, W. F. (Ed.): *Reasoning, Necessity, and Logic: Developmental Perspectives.* Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey - Hove and London, 111-131.

Flavell, J. H. (1979): Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive-developmental inquiry. *American Psychologist, 34,* 906-911.

Flavell, J. H. (1987): Speculations about the nature and development of metacognition. In: Weinert, F. E. és Kluwe, R. (szerk.): *Metacognition, motivation, and understanding.* Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey, 21-29.

Flavell, J. H. (2000): Development of children's knowledge about the mental world. *International Journal of Behavioral Development, 24,* 15-23.

Forrai Gábor (1984): *Rudolf Carnap*. Kossuth Könyvkiadó, Budapest.

Földesi Tamás: *A marxista filozófia bizonyításelméletének alapjai*. Kossuth Könyvkiadó, Budapest.

Garrison, J. W. és Bentley, M. L. (1990): Teaching scientific method: The logic of confirmation and falsification. *School Science and Mathematics, 90*, 188-197.

Gilligan, C. (1982/1998): A nő helye a férfi életciklusában. In: Cs. Czachesz Erzsébet (szerk.): *Multikulturális nevelés. Szöveggyűjtemény tanító- és tanárszakos hallgatók számára*. Mozaik Oktatási Stúdió, Szeged, 77-89.

Girotto, V. és Light, P. (1993): The pragmatic bases of children's reasoning. In: Light, P. és Butterworth, G.: *Context and cognition*. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey, Hove, and London.

Gorman, M. E. (1992): Experimental simulations of falsification. In: Keane, M. T. és Gilhooly, K. J. (szerk.): *Advances in the psychology of thinking*. Volume One. 147-176.

Gorman, M. E. (1994): Toward an experimental social psychology of science: preliminary results and reflexive observations. In: Shadish, W. R. és Fuller, S. (szerk.): *The social psychology of science*. The Guilford Press, New York-London, 181-196.

Gorman, M. E. és Gorman, M. E. (1984): A comparison of disconfirmatory, confirmatory and control strategies on Wason's 2-4-6 Task. *Quarterly Journal of Experimental Psychology, 36A*, 629-648.

Gourgey, A. F. (1998): Metacognition in basic skills instruction. *Instructional Science, 26*, 81-96.

Gödöny József (1968): *Bizonyítás a nyomozásban*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.

Graham, G. (1993): *Philosphy of mind: An introduction*. Blackwell: Oxford (GB), Cambridge (US)

Gray, W. M. (1990): Formal Operational Thought. In: Overton, W. F. (Ed.): *Reasoning, Necessity, and Logic: Developmental Perspectives*. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey - Hove and London, 227-253.

Hahn, H. (1972): Logika, matematika és természetismeret. . In: Altrichter Ferenc (szerk.): *A Bécsi Kör filozófiája*, Gondolat Kiadó, Budapest, 217-244.

Hanna, G. (1989). More than formal proof. *For the Learning of Mathematics, 9*, 20-23.

Hanna, G. (1995): Challenges to the importance of proof. *For the Learning of Mathematics, 15*, 42-49.

Hanna, G. (1996): The ongoing value of proof. In: *Proceedings of the 21th PME Conference*, Valencia, Spain, vol. 1, 21-34.

Hanna, G. és Jahnke, H. N. (1993): Proof and application. *Educational Studies in Mathematics, 24*, 421-438.

Harel, G. és Sowder, L. (1998): Students' proof schemes: Research from exploratory studies. In: Dubinsky, E., Schoenfeld, A.és Kaput, J. (Eds.): *Research Issues in Collegiate Mathematics Education* Vol. 7.,American Mathematical Society, Washington, D. C., 234-283.

Havas Katalin (1999): Gondolkodni kell tanítanunk! Iskolakultúra, 1. sz., 76-80.

Helms, J. E. (1992): Why is there no study of cultural equivalence in standardized cognitive ability testing? *American Psychologist, 47*, 1083-1101.

Henle, M. (1962): On the relation between logic and thinking. *Psychological Review* 69, 366-378.

Hersh, R. (1993): Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics, 24*, 389-399.

Hodgson, T. és Morandi, P. (1996): Exploration, explanation, formalization: A three-step approach to proof. *Primus, 6*, 49-57.

Hoffer, A. (1981): Geometry is more than proof. *Mathematics Teacher, 74*, 11- 21.

Horváth György (1984): *A tartalmas gondolkodás*. Tankönyvkiadó, Budapest.
Horváth György (1990): *Az intelligencia mérése*. Tankönyvkiadó, Budapest.
Horváth György (1993): *Bevezetés a tesztelméletbe. A tesztszerkesztés és -értékelés alapjai.* Keraban Könyvkiadó, Budapest.
Hoyles, C. (1997): The curricular shaping of students' approches to proof. *For the Learning of Mathematics, 17*, 7-16.
Inhelder, B. és de Caprona, D. (1990): The Role and Meaning of Structures in Genetic Epistemology. In: Overton, W. F. (Ed.): *Reasoning, Necessity, and Logic: Developmental Perspectives. Lawrence Erlbaum* Associates, Hillsdale, New Jersey - Hove and London, 33-44.
Inhelder, B. és Piaget, J. (1955/1984): *A gyermek logikájától az ifjú logikájáig*. Akadémiai Kiadó, Budapest.
Johansson, B. S. és Sjölin, B. (1975): Preschool children's understanding of the coordinators „and" and „or". *Journal of Experimental Child Psychology, 19*, 233-240.
Johnson-Laird, P. N. és Byrne, R. M. J. (1991): *Deduction.* Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey - Hove and London.
Johnson-Laird, P. N., Byrne, R. M. J.és Tabossi, P. (1989): Reasoning by model: The case of multiple quantification. *Psychological Review, 96*, 658-673.
Józsa Krisztián and Csíkos Csaba: *The relationships between mathematics self-concept and cognitive abilities required for mathematics achievement.* Paper presented at the 8th European Conference for Research on Learning and Instruction, Gothenburg, Sweden, 24-28, August 1999.
Kaiser, M. J. (1993): Demonstrating proof by contrapositive and contradiction through physical analogs. *School Science and Mathematics, 93*, 369-372.
Karmiloff-Smith, A. (1992/1996): Túl a modularitáson: A kognitív tudomány fejlődéselméleti megközelítése. In: Pléh Csaba (szerk.): *Kognitív tudomány.* Osiris Kiadó, Budapest, 254-281.
Kárteszi Ferenc (1972): *A geometriatanítás korszerűsítéséről.* Tankönyvkiadó, Budapest.
Katona Géza (1990): *Valós vagy valótlan?* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.
Kecskeméty László és Izsó Lajos (1996): *Az SPSS® for Windows™ programrendszer alapjai.* SPSS Partner Bt, Budapest.
Kiss Szabolcs (1996): Az „elmélet" elmélet és a szimulációs megközelítés szerepe a gyermek tudatelméletének magyarázatában. *Pszichológia, 16*, 383-396.
Klix, F. (1985): *Az ébredő gondolkodás. Az emberi intelligencia fejlődéstörténete*. Gondolat, Budapest.
Komatsu, L. K. és Galotti, K. M. (1986): Children's Reasoning about Social, Physical, and Logical Regularities: A Look at Two Worlds. *Child Development, 57*, 413-420.
Konior, J. (1993): Research into the construction of mathematical texts. *Educational Studies in Mathematics, 24*, 251-256.
Koriat, A. (1993): How do we know that we know? The accessibility model of the feeling of knowing. *Psychological Review, 100*, 609-639.
Korom Erzsébet (1997): Naiv elméletek és tévképzetek a természettudományos fogalmak tanulásakor. *Magyar Pedagógia 97*, 19-40.
Kraft, V. (1968/1991): A Bécsi Kör. A neopozitivizmus eredete. In: Kocsondi András (Szerk.): *Pozitivista tudományfilozófiák. Filozófiatörténeti szöveggyűjtemény.* JATE Kiadó, Szeged,
Kuhn, D. és Angelev, J. (1976): An Experimental Study of the Development of Formal Operational Thought. *Child Development, 47*, 697-706.
Lafontaine, D. (2000): *Large scale assessments in reading: Lessons from the past and challenges for the future.* Paper presented at the 1st Conference of the EARLI/SIG 'Assessment and Evaluation', Maastricht, The Netherlands.

Lakatos Imre (1976/1981): *Bizonyítások és cáfolatok.* Gondolat, Budapest.
Lawrence, J. A. (1991): Informal reasoning and the judicial system. In: Voss, J. F., Perkins, D. N. és Segal, J. W. (Ed.): *Informal reasoning and education.* Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey - Hove and London.
Leahy, T. H. és Harris, R. J. (1993): *Learning and Cognition.* 3rd edition. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
Lénárd Ferenc (1982): *Képességek fejlesztése a tanítási órán.* Tankönyvkiadó, Budapest.
Lénárd Ferenc (1989): A készség értelmezése. *Pedagógusok Lapja,* 15-16. sz. 4. o.
Leonard, B. (1997): Proof: The power of persuasion. *The Mathematics Teacher,* 90, 202-205.
Lietz, P. és Keeves, J. P. (1997): Cross-sectional research methods. In: Keeves, J. P. (szerk.): *Educational research, methodology, and measurement: An international handbook.* 2. kiadás. Pergamon, Oxford - New York - Tokyo, 119-126.
Lillard, A. (1998): Theories behind theories of mind. *Human Development,* 41, 40-46.
Lillard, A. S. és Flavell, J. H. (1990): Young children's preference for mental state versus behavioral descriptions of human actions. *Child Development, 61,* 731-741.
Lurija, A. R. (1975): *Válogatott tanulmányok.* Gondolat, Budapest.
Maher, C. A. és Martino, A. M. (1996): The development of the idea of mathematical proof: A 5-year case study. *Journal for Research in Mathematics Education, 27,* 194-214.
Mariotti, M. A. (1998): Introduzione alla dimostrazione all'inizio della scuola secondaria superiore. *L'insegnamento della Matematikca e delle Scienze integrate, 21,* 209-252.
Mariotti, M. A. és Maracci, M. (1999): Conjecturing and proving in problem-solving situations. In Zaslavsky, O. (Ed.): *Proceedings of the 23rd Conference of PME,* Haifa, Israel, vol3, 265-272.
Markel, W. D. (1994): The role of proof in mathematics education. *School Science and Mathematics, 94,* 291-295.
Markovits, H. (1986): Familiarity effects in conditional reasoning. *Journal of Educational Psychology, 78* , 492-494.
Markovits, H., Schleifer, M. és Fortier, L. (1989): Development of elementary deductive reasoning in young children. *Developmental Psychology, 25,* 787-793.
Martin, W. G. és Harel, G. (1989): Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematical Education, 20,* 41-51.
Matalon, B. (1962/1990): A Genetic Study of Implication. In: Overton, W. F. (Ed.): *Reasoning, Necessity, and Logic: Developmental Perspectives.* Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey - Hove and London, 87-110.
McCabe, A. E. és mtsai (1983): Conditional Statements in young children's spontaneous speech. *Journal of Child* Language, *10,* 253-258.
Meehan, A. M. (1984): A meta-analysis of sex differences in formal operational thought. *Child Development, 55,* 1110-1124.
Mercer, N. (1993): Culture, context and the construction of knowledge. n: Light, P. and Butterworth, G.: *Context and cognition,* 1-13., Erlbaum, Hillsdale, NJ, 28-46.
Moore, R. C. (1994): Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics, 27,* 249-266.
Moshman, D. (1990): The development of metalogical understanding. In: Overton, W. F. (Ed.): *Reasoning, necessity, and logic: Developmental perspectives.* Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey - Hove and London, 205-225.
Moshman, D. és Franks, B. A. (1986). Development of the concept of inferential validity. *Child Development 57,* 153-165.
Moshman, D. és Timmons, M. (1982): The construction of logical necessity. *Human Development, 25,* 309-323.
Movshovitz-Hadar, N. (1988): School mathematics theorems - an endless source of surprise. *For the Learning of Mathematics, 8,* 34-40.

Movshovitz-Hadar, N. és Hadass, R. (1990): Preservice education of math teachers using paradoxes. *Educational Studies in Mathematics, 21*, 265-287.
Murray, F. B. (1990): The Conversion of Truth Into Necessity. In: Overton, W. F. (Ed.): *Reasoning, Necessity, and Logic: Developmental Perspectives*. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey - Hove and London, 183-203.
Nagy József (1968): A készség és jártasság szabatos meghatározásáról. *Köznevelés*, 11. sz. 419-426.
Nagy József (1975): A témazáró tesztek reliabilitása és validitása. *Acta Universitatis Szegediensis de A. J. Nominatae, Sectio Paedagogica et Psychologia, Series Specifica*, Szeged.
Nagy József (1990): A rendszerezési képesség kialakulása. A gondolkodási műveletek elsajátítása. Akadémiai Kiadó, Budapest.
Nagy József (1998a): Kognitivizmus és az értelem kiművelése. Iskolakultúra, 2. sz. 57-70.
Nagy József (1998b): A kognitív képességek rendszere és fejlődése. Iskolakultúra, 10. sz., 3-21. o.
Nagy József (1999): A kognitív készségek és képességek fejlesztése. Iskolakultúra, 1. sz. 14-26.
Nagy Sándor (1960): *Az oktatás elmélete*. Tankönyvkiadó, Budapest.
Nagy Sándor (1981): *Az oktatáselmélet alapkérdései*. Tankönyvkiadó, Budapest.
Neimark, E. D. és Slotnick, N. S. (1970): Development of the understanding of logical connectives. *Journal of* Educational *Psychology, 61*, 451-460.
Neisser, U., Boodoo, G., Bouchard, T. J., Boykin, A. W., Brody, N., Ceci, S. J., Halpern, D. F., Loehlin, J. C., Perloff, R., Sternberg, R. J., Urbina, S. (1996): Intelligence: knows and unknows. *American Psychologist, 51*, 77-101.
Nelson, K., Plesa, D. és Henseler, S. (1998): Children's theory of mind: An experimental interpretation. *Human Development, 41*, 7-29.
Nemzeti Alaptanterv (1995). Művelődési és Közoktatási Minisztérium, Budapest.
O'Brien, D. és Overton,W. F. (1980): Conditional reasoning following contradictory evidence: A developmental analysis. *Journal of Experimental Child Psychology* **30**, 44-61.
Oakhill, J. V. és Johnson-Laird, P. N. és Garnham, A. (1989): Believability and syllogistic reasoning. *Cognition, 31*,117-140.
Orosz Sándor (1977): *A tananyag elemzése*. OOK, Veszprém.
Oroszlány Péter (1998): *Tanári kézikönyv a tanulás tanításához*. Alternatív Közgazdasági Gimnázium Alapítvány, Budapest.
Osherson., D. N. és Markman, E. (1975): Language and the ability to evaluate contradictions and tautologies. *Cognition, 17*, 213-226.
Otte, M. (1994): Mathematical knowledge and the problem of proof. *Educational Studies in Mathematics, 26*, 299-321.
Overton, W. F. (1990): Competence and procedures: Constraints on the developmenrt of logical reasoning. In: Overton, W. F. (szerk.): *Reasoning, necessity, and logic: Developmental perspectives*. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey - Hove and London, 1-32.
Overton, W. F. és mtsai (1987): Form and content in the development of deductive reasoning. *Developmental Psychology, 23*, 22-30.
Parkin, A. J. (1993): *Memory*. Blackwell, Oxford (UK) - Cambridge (USA).
Pethő Bertalan (2000): *Az ismeretről*. In: Pléh Csaba, Kampis György és Csányi Vilmos (szerk.): A megismeréskutatás útjai. Akadémiai Kiadó, Budapest, 193-206.
Piaget, J. (1967/1997): *Az értelem pszichológiája*. Kairosz Kiadó, Budapest.
Piatelli-Palmarini, M. (1996): Evolúció, szelekció és megismerés: A tanulástól a paraméterbeállításig - a biológiában és a nyelvben. In: Pléh Csaba (szerk.): *Kognitív tudomány*. Osiris Kiadó, Budapest.

Piéraut-Le Bonniec, G. (1990): The logic of meaning and meaningful implication. In: Overton, W. F. (szerk.): *Reasoning, necessity, and logic: Developmental perspectives*. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey - Hove and London, 67-85.
Pléh Csaba (1998a): *Bevezetés a megismeréstudományba*. Typotex Elektronikus Kiadó, Budapest.
Pléh Csaba (1998b): Az evolúciós pszichológia. *Magyar Tudomány*, 9. sz., 1054-1060.
Pólya György (1957): *A gondolkodás iskolája*. Bibliotheca, Budapest.
Pólya György (1988): *Indukció és analógia*. Gondolat, Budapest.
Popper, K. R. (1997): *A tudományos kutatás logikája*. Európa Kiadó, Budapest.
Ricco, R. B. (1990): Necessity and the logic of entailment. In: Overton, W. F. (szerk.): *Reasoning, necessity, and logic: Developmental perspectives*. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey - Hove and London.
Rips, L. J. (1983): Cognitive processes in propositional reasoning. *Psychological Review, 90*, 38-71.
Rips, L. J. (1989): The psychology of knights and knaves. *Cognition, 31*, 85-116.
Rips, L. J. (1990): Paralogical reasoning: Evans, Johnson-Laird, and Byrne on liar and trith-teller puzzles. *Cognition, 36*, 291-314.
Rips, L. J.(1994): *The Psychology of Proof. Deductive Reasonig in Human Thinking*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts - London.
Roazzi, A. és Bryant, P. (1993): Social class, context and development. In: Light, P. és Butterwoth, G. (szerk.): *Context and cognition*, 14-27., Erlbaum, Hillsdale:NJ - York - Chichester - ...
Roberge, J. J. (1977): Effects of content on inclusive disjunction reasoning. *Quarterly Journal of Experimental Psychology, 29*, 669-676.
Ruzsa Imre (1984): Klasszikus, modális és intenzionális logika. Akadémiai Kiadó, Budapest.
Ruzsa Imre és Urbán János (1966): A matematika néhány filozófiai problémájáról. Tankönyvkiadó, Budapest.
Saul, M. (1992): Jewels in the crown. The beauty of inductive reasoning. *Quantum*, July/August 10-14.
Schoenfeld, A. H. (1988): When good teaching leads to bad results: The disasters of "well-taught" mathematics courses. *Educational Psychologist, 23*, 145-166.
Schlick, M. (1972): *Pozitivizmus és realizmus*. In: Altrichter Ferenc (szerk.): A Bécsi Kör filozófiája, Gondolat Kiadó, Budapest, 93-133.
Scholnick, E. K. (1990): The three faces of if. In: Overton, W. F. (szerk.): *Reasoning, necessity, and logic: Developmental perspectives*. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey - Hove and London, 159-181.
Scholnick, E. K. és Wing, C. S. (1991): Speaking deductively: Preschoolers' use of if in conversation and in conditional inference. *Developmental Psychology, 27*, 249-258.
Scholnick, E. K. és Wing, C. S. (1992): Speaking deductively: using conversation to trace the origins of conditional thought in children. *Merrill-Palmer Quarterly, 38*, 1-20.
Scholnick, E. K. és Wing, C. S. (1995): Logic in conversation: Comparative studies of deduction in children and adults. *Cognitive Development, 10*, 319-345.
Schraw, G. (1998): Promoting general metacognitive awareness. *Instructional Science, 26*, 113-125.
Schraw, G. és Dennison, R. S. (1994): Assessing metacognitive awareness. *Contemporary Educational Psychology, 19*, 460-475.
Schütte, K. (1977): *Proof theory*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.
Senk, S. L. (1985): How well do students write geometry proofs? *Mathematics Teacher, 78*, 448-456.
Shawn, L. W. és Overton, W. F. (1990): Semantic familiarity, relevance, and the development of deductive reasoning. *Developmental Psychology, 31*, 187-276.

Sherard, W. H. (1981): Why is geometry a basic skill? *Mathematics Teacher, 74*, 19-21.
Shoenfeld, A. H. (1987): What's all the fuss about metacognition? In: Shoenfeld, A. H. (szerk.): *Cognitive science and mathematics education.* Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, New Jersey - London, 189-215.
Simon, H. A. (1982): *Korlátozott racionalitás.* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.
Sinnott, J. D. (1975): Everyday thinking and Piagetian operativity in adults. *Human Development, 18*, 430-443.
Skemp, R. R. (1975): *A matematikatanulás pszichológiája.* Gondolat, Budapest.
Skovsmose, O. (1994): *Towards a philosophy of critical mathematics education.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London.
Smullyan, R. (1978/1988): *Mi a a címe ennek a könyvnek?* Műszaki Könyvkiadó, Budapest.
Sodian, B. és Wimmer, H. (1987): Children's understanding of inference as a source of knowledge. *Child Development, 58*, 424-433.
Sperber, D. és Wilson, D. (1981): Pragmatics. *Cognition, 10*, 281-286.
Sperber, D. és Wilson, D. (1995): *Relevance.* Communication and cognition. 2nd Edition. Blackwell, Oxford, UK, Cambridge, USA
Sternberg, R. J. (1988): *The triarchic mind. A new theory of human intelligence.* Viking, New York.
Sternberg, R. J. (1998): Metacognition, abilities, and developing expertise: What makes an expert student? *Instructional Science, 26*, 127-140.
Szabó Árpád (1978): *The beginnings of Greek mathematics.* Akadémiai Kiadó, Budapest.
Szász Gábor (1972): *Az axiomatikus módszer.* Tankönyvkiadó, Budapest.
Szigetvári Sándor (1970*): Az induktív és a deduktív következtetések kapcsolata az empíria síkján.* Akadémiai Kiadó, Budapest.
Sztoljár, A. A. (1970): A matematikatanítás logikai problémái. Tankönyvkiadó, Budapest.
Tacq, J. (1997): *Multivariate analysis techniques in social science research.* Sage Publications, London - Thousand Oaks - New Delhi.
Tarkó Klára (1999): Az olvasás és a metakogníció kapcsolata iskoláskorban. *Magyar Pedagógia, 99*, 175-191.
Tarski, A. (1990): *Bizonyítás és igazság.* Gondolat, Budapest.
Thompson, D. R. (1991): *Reasoning and proof in precalculus and discrete mathematics.* Paper presented at the annual meeting of AERA, Chicago.
Thompson, D. R. (1996): Learning and teaching indirect proof. *Mathematics Teacher, 89*, 474-482.
Thompson, D. R. és Senk, S. L. (1993): Assessing reasoning and proof in high school. In: *Assessment in the mathematics classroom.* Yearbbok of the National Council of Teachers of Mathematics, 167-176.
Thurston, W. P. (1995): On proof and progress in mathematics. *For the Learning of Mathematics, 15*, 29-37.
Tirosh, C. (1999): *Universal theorems: A paradigmatic model of mathematical theorems.* Paper presented at the 23th Conference of PME, Haifa, Israel.
Trosztnyikov, V. N. (1981): *Konstruktív módszerek a matematikában.* Gondolat, Budapest.
Tudományos világfelfogás. A Bécsi Kör. (1929) In: Kocsondi András (1991, szerk.): *Pozitivista tudományfilozófiák.* JATE Kiadó, Szeged.
Tymoczko, T. (1986): Making room for mathematicians in the philosophy of mathematics. *The Mathematical Intelligencer, 8*, 44-50.
van der Linden, W. J. és Hambleton, R. K. (1997, sterk.): *Handbook of modern item response theory.* Springer, New York - Berlin - Heidelberg etc.
van der Waerden, B. L. (1977): *Egy tudomány ébredése.* Gondolat, Budapest.
Vári Péter (1997, szerk.): *Monitor '95: A tanulók tudásának felmérése.* OKI, Budapest.

Vidákovich Tibor (1987a): *System of operations of propositional logic in the thinking of 10 and 13 year old schoolchildren.* Poster presented at the II. EARLI Conference, Tübingen, Germany.

Vidákovich Tibor (1987b): A logikai műveleti képességek fejlesztése: feladatok és lehetőségek. *Pedagógiai Szemle, 37,* 10. sz. 1038-1046.

Vidákovich Tibor (1989a): *Diagnostic evaluation of the deductive reasoning of 14 year olds.* Poster presented at the X. biennial meeting of ISSBD, Jyväskylä, Finland.

Vidákovich Tibor (1989b): Klasszikus vagy releváns logika szerint következtetnek-e a 14 évesek? *Acta Universitatis Szegediensis de Attila József Nominatae, Sectio Paedagogica, Series Specifica, 31,* 105-116.

Vidákovich Tibor (1990): *Diagnosztikus pedagógiai értékelés.* Akadémiai Kiadó, Budapest.

Vidákovich Tibor (1996): *Formal operations and deductive patterns of 13 and 17 year old students.* Poster presented at The Growing Mind International Conference in Honor of the Centennial of Jean Piaget's Birth, Geneva, Switzerland.

Vidákovich Tibor és Csapó Benő (1988): *Changes in the logical structures of schoolchildren after a 10-month experimental training period.* Poster presented at the III. European Conference on Developmental Psychology, Budapest.

Vidákovich Tibor és Csíkos Csaba (1998): A tudás szerveződése az összefüggés-vizsgálatok tükrében. In: Csapó Benő (szerk.): *Az iskolai tudás.* Osiris Kiadó, Budapest, 281-294.

von Davier, M. (1999): *WINMIRA 32 - A program for polytomous IRT models and their mixture generalizations.* CIT-presentation at the 8th European Conference for Research on Learning and Instruction, Gothenburg, Sweden, 24-28, August 1999.

Walsh, W. B. és Betz, N. E. (1990): *Tests and assessment.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Ward, S. L. és Overton, W. F. (1990): Semantic familiarity, relevance, and the development of deductive reasoning. *Developmental Psychology, 26,* 488-493.

Wason, P. C. (1966/1972): A gondolkodás. In: Foss, B. M. (szerk.): *Új távlatok a pszichológiában.* Gondolat, Budapest, 170-191.

Wason, P. C. és Green, D. W. (1984): Reasoning and mental representation. Quarterly Journal of Experimental Psychology, *36A.*, 597-610.

Wason, P. C. és Johnson-Laird, P. N. (1970): A conflict between selecting and evaluating information in an inferential task. *British Journal of Psychology, 61,* 509-515.

Wharton, C. M. és mtsai (1998): The neuroanatomy of analogical reasoning. In: Holyoak, K., Gentner, D. és Kokinov, B. (szerk.): *Advances in analogy research. Integration of theory and data form the cognitive, computational, and neural sciences.* New Bulgarian University, Sofia, Bulgaria., 260-273.

Wilder, R. L. (1944). The nature of mathematical proof. *American Mathematical Monthly, 51,* 309-323.

Wildman, T. M. és Fletcher, H. J. (1977): Developmental increases and decreases in solutions of conditional syllogism problems. *Developmental Psychology, 13,* 630-636.

Wing, C. S. és Scholnick, E. K. (1981): Children's comprehension of pragmatic concepts expressed in 'because', 'although', 'if' and 'unless'. *Journal of Child Language, 8,* 347-365.

Winicki-Landman, G. (1998): On proofs and their performance as work of art. *Mathematics Teacher, 91,* 722-725.

Wittgentstein, L. (1918/1989): *Logikai-filozófiai értekezés.* 2. kiadás. Akadémiai Kiadó, Budapest.

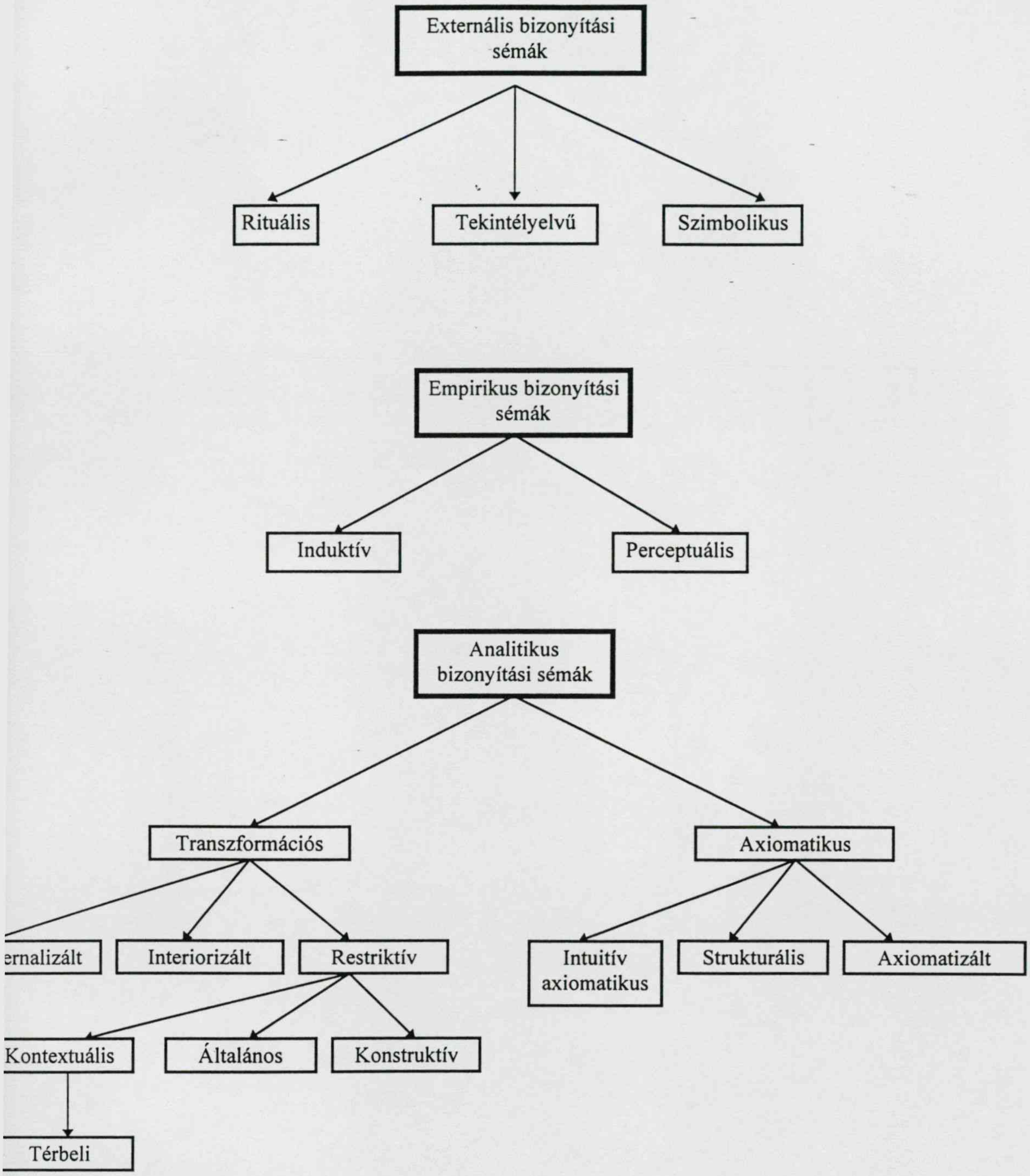
Zaslavsky, O. (1989): *The development of a concept: A trace from the teacher's knowledge to a student's knowledge.* Paper presented at the Annual Meeting of the AERA, San Francisco, CA.

Zsigmond István és Csíkos Csaba (2000): Az analógiás gondolkodásról: újabb eredmények és kutatási tendenciák. *Magyar Pszichológiai Szemle, 55*, 63-80.

Mellékletek

el és Sowder modelljének bizonyítási sémái

ís: Harel, G. és Sowder, L. (1998): Students' proof schemes: Research from exploratory studies. In: Dubinsky, E., Schoenfeld, Kaput, J. (Eds.): Research Issues in Collegiate Mathematics Education Vol. 7.,American Mathematical Society, 234-283.)



Előfelmérés bizonyítási képesség tesztjei

GONDOLKODTATÓ FELADATOK I.
A változat

Név: .... Osztály: ....

Iskola: ....

4	1						

Ezen a feladatlapon olyan feladatokkal találkozol, amelyekhez hasonlók csak ritkán fordulnak elő az iskolában. Néhány esetben az iskolában tanult ismereteket kell felhasználnod, de van olyan feladat, amikor a te saját ötletedre, egyéni gondolataidra kell támaszkodnod. Minden feladatot figyelmesen olvass el, és válaszolj legjobb tudásod szerint! **Igyekezz úgy beosztani az idődet, hogy minden feladatot meg tudj oldani!**

1. Hogyan lehet bebizonyítani, hogy ha a 7045-öt elosztjuk 3-mal, akkor nem egész számot kapunk?

2. Egy képzeletbeli város lakói három csoportba tartoznak: vannak köztük igazmondók, akik mindig igazat mondanak; vannak hazugok, akik mindig hazudnak; és vannak felemások, akik felváltva mondanak igaz és hamis mondatokat. Egy éjszaka csöng a tűzoltóság telefonja, és a következő párbeszéd hangzik el:

Tűzoltó: *Tessék, tűzoltóság.*
Telefonáló: *Ég a városháza.*
Tűzoltó: *Igazmondó vagy?*
Telefonáló: *Felemás vagyok.*

Ég-e a városháza? Válaszodat indokold!

3. Az emberek nagyon sokáig nem tudták, hogy a Föld, amelyen élünk, gömb alakú. Hogyan tudnánk bebizonyítani, hogy a Föld gömb alakú, egy olyan embernek, aki ezt nem hiszi el?

4. Két ember beszélgetéséből való az alábbi részlet:

- *Szerinted a mai fiatalok miért hallgatják olyan hangosan a magnót?*
- *Azért, mert a mai fiataloknak sokkal rosszabb a hallásuk, mint a régieknek.*
- *És vajon miért rosszabb a mai fiatalok hallása?*
- *Hát mert olyan hangosan hallgatják a magnót!*

Mi a véleményed az elhangzott válaszokról?

5. Azt szeretnénk megmutatni, hogy Laci erős. Olvasd el, mit mondott Anna és Balázs!

Anna: *„Aki erős, az a nehéz zsákokat is fel tudja emelni. Laci fel tudja emelni a nehéz zsákokat, tehát Laci erős."*
Balázs: *„Aki nem erős, az nem tudja felemelni a nehéz zsákokat. Laci fel tudja emelni a nehéz zsákokat, tehát Laci erős."*

Szerinted a két vélemény közül melyik alkalmas annak bizonyítására, hogy Laci erős? **Tégy X jelet a megfelelő négyzetbe!**

	hibátlan	nem hibátlan, de nem is teljesen rossz	teljesen rossz
Anna bizonyítása	☐	☐	☐
Balázs bizonyítása	☐	☐	☐

6. Ebben a feladatban egyszerű, hétköznapi eseményekről lesz szó. Olvasd el figyelmesen a mondatokat, majd döntsd el, hogy szerinted mennyire helyes a következtetésünk! **Karikázd be azt az egy betűt**, amelyikhez tartozó válasz a legpontosabban kifejezi a véleményedet!

- Tudjuk, hogy ha Kovács tanár úr eljön velünk az osztálykirándulásra, akkor hegyet fogunk mászni. Biztosan tudjuk azt is, hogy hegyet fogunk mászni. Igaz-e, hogy Kovács tanár úr eljön velünk az osztálykirándulásra?

a) biztos, hogy nem igaz
b) valószínű, hogy nem igaz
c) egyforma valószínűséggel lehet igaz is, meg nem igaz is
d) valószínű, hogy igaz
e) biztos, hogy igaz

- Tudjuk, hogy ha Évi kettesre áll matekból, akkor egész délután otthon tanul. Biztosan tudjuk azt is, hogy Évi nem áll kettesre matekból. Igaz-e, hogy nem egész délután tanul otthon?

a) biztos, hogy nem igaz
b) valószínű, hogy nem igaz
c) egyforma valószínűséggel lehet igaz is, meg nem igaz is
d) valószínű, hogy igaz
e) biztos, hogy igaz

GONDOLKODTATÓ FELADATOK I.
B változat

Név: .... Osztály: ....

Iskola: ....

4	2						

Ezen a feladatlapon olyan feladatokkal találkozol, amelyekhez hasonlók csak ritkán fordulnak elő az iskolában. Néhány esetben az iskolában tanult ismereteket kell felhasználnod, de van olyan feladat, amikor a te saját ötletedre, egyéni gondolataidra kell támaszkodnod. Minden feladatot figyelmesen olvass el, és válaszolj legjobb tudásod szerint! **Igyekezz úgy beosztani az idődet, hogy minden feladatot meg tudj oldani!**

1. Hogyan lehet bebizonyítani, hogy ha 6332-t elosztjuk 3-mal, akkor nem egész számot kapunk?

2. Egy képzeletbeli város lakói három csoportba tartoznak: vannak köztük igazmondók, akik mindig igazat mondanak; vannak hazugok, akik mindig hazudnak; és vannak felemások, akik felváltva mondanak igaz és hamis mondatokat. Egy éjszaka csöng a tűzoltóság telefonja, és a következő párbeszéd hangzik el:

Tűzoltó: *Tessék, tűzoltóság.*
Telefonáló: *Ég a városháza.*
Tűzoltó: *Igazmondó vagy?*
Telefonáló: *Felemás vagyok.*

Ég-e a városháza? Válaszodat indokold!

3. A detektív maga elé rakta a nyomozás eredményeit tartalmazó feljegyzéseit. A következő mondatok voltak a papíron:

Ha a tettes ott járt az étteremben, akkor kifizette a számlát.
A gyanúsított nem fizette ki a számlát.

Mire következtetett ebből a két mondatból a detektív?

4. Olvasd el figyelmesen a következő szöveget!

Egy állatkerti séta alkalmából Feri azt kérdezte a nagyapjától:
- Miért van olyan hosszú nyaka a zsiráfnak?
- Hogy könnyen elérje a legmagasabb fák lombját is - hangzott a válasz.
- És miért olyan magasak azok a fák?
- Hogy a zsiráfnak ne kelljen lehajolnia, ha enni akar - mondta a nagyapa.

Mi a véleményed a nagyapa válaszairól?

5. Azt szeretnénk megmutatni, hogy Kinga okos. Olvasd el, mit mondott Anna és Balázs!

Anna: *„Aki fejben ki tudja számolni, hogy mennyi 15-ször 25, az okos. Kinga fejben ki tudja számolni, hogy mennyi 15-ször 25, tehát Kinga okos."*
Balázs: *„Aki nem okos, az nem tudja fejben kiszámolni, hogy mennyi 15-ször 25. Kinga fejben ki tudja számolni, hogy mennyi 15-ször 25, tehát Kinga okos."*

Szerinted a két vélemény közül melyik alkalmas annak bizonyítására, hogy Kinga okos? Tégy **X** jelet a megfelelő négyzetbe!

	hibátlan	nem hibátlan, de nem is teljesen rossz	teljesen rossz
Anna bizonyítása	☐	☐	☐
Balázs bizonyítása	☐	☐	☐

6. Ebben a feladatban egyszerű, hétköznapi eseményekről lesz szó. Olvasd el figyelmesen a mondatokat, majd döntsd el, hogy szerinted mennyire helyes a következtetésünk! **Karikázd be azt az egy betűt,** amelyikhez tartozó válasz a legpontosabban kifejezi a véleményedet!

- Tudjuk, hogy ha Peti megkapja a zsebpénzét, akkor este moziba megy. Biztosan tudjuk azt is, hogy este moziba megy. Igaz-e, hogy megkapja zsebpénzét?

a) biztos, hogy nem igaz
b) valószínű, hogy nem igaz
c) egyforma valószínűséggel lehet igaz is, meg nem igaz is
d) valószínű, hogy igaz
e) biztos, hogy igaz

- Tudjuk, hogy ha fúj a szél, akkor megrendezik a vitorlásversenyt. Biztosan tudjuk azt is, hogy nem fúj a szél. Igaz-e, hogy nem rendezik meg a vitorlásversenyt?

a) biztos, hogy nem igaz
b) valószínű, hogy nem igaz
c) egyforma valószínűséggel lehet igaz is, meg nem igaz is
d) valószínű, hogy igaz
e) biztos, hogy igaz

GONDOLKODTATÓ FELADATOK II.
A változat

Név: .... Osztály: ....

Iskola: ....

4	3						

Ezen a feladatlapon olyan feladatokkal találkozol, amelyekhez hasonlók csak ritkán fordulnak elő az iskolában. Néhány esetben az iskolában tanult ismereteket kell felhasználnod, de van olyan feladat, amikor a te saját ötletedre, egyéni gondolataidra kell támaszkodnod. Minden feladatot figyelmesen olvass el, és válaszolj legjobb tudásod szerint! **Igyekezz úgy beosztani az idődet, hogy minden feladatot meg tudj oldani!**

1. Bizonyítsd be, hogy a 2 az egyetlen páros prímszám!

2. Egy képzeletbeli város lakói három csoportba tartoznak: vannak köztük igazmondók, akik mindig igazat mondanak; vannak hazugok, akik mindig hazudnak; és vannak felemások, akik felváltva mondanak igaz és hamis mondatokat. Egy éjszaka csöng a tűzoltóság telefonja, és a következő párbeszéd hangzik el:

Tűzoltó: *Tessék, tűzoltóság.*
Telefonáló: *Ég a városháza.*
Tűzoltó: *Igazmondó vagy?*
Telefonáló: *Felemás vagyok.*

Ég-e a városháza? Válaszodat indokold!

. Az emberek nagyon sokáig nem tudták, hogy a Föld, amelyen élünk, gömb alakú. Hogyan tudnánk bebizonyítani, hogy a Föld gömb alakú, egy olyan embernek, aki ezt nem hiszi el?

4. Két ember beszélgetéséből való az alábbi részlet:

- *Szerinted a mai fiatalok miért hallgatják olyan hangosan a magnót?*
- *Azért, mert a mai fiataloknak sokkal rosszabb a hallásuk, mint a régieknek.*
- *És vajon miért rosszabb a mai fiatalok hallása?*
- *Hát mert olyan hangosan hallgatják a magnót!*

Mi a véleményed az elhangzott válaszokról?

5. Azt szeretnénk megmutatni, hogy Laci erős. Olvasd el, mit mondott Anna és Balázs!

Anna: *„Aki erős, az a nehéz zsákokat is fel tudja emelni. Laci fel tudja emelni a nehéz zsákokat, tehát Laci erős."*
Balázs: *„Aki nem erős, az nem tudja felemelni a nehéz zsákokat. Laci fel tudja emelni a nehéz zsákokat, tehát Laci erős."*

Szerinted a két vélemény közül melyik alkalmas annak bizonyítására, hogy Laci erős? Tégy **X** jelet a megfelelő négyzetbe!

	hibátlan	nem hibátlan, de nem is teljesen rossz	teljesen rossz
Anna bizonyítása	☐	☐	☐
Balázs bizonyítása	☐	☐	☐

6. Ebben a feladatban egyszerű, hétköznapi eseményekről lesz szó. Olvasd el figyelmesen a mondatokat, majd döntsd el, hogy szerinted mennyire helyes a következtetésünk! **Karikázd be azt az egy betűt**, amelyikhez tartozó válasz a legpontosabban kifejezi a véleményedet!

- Tudjuk, hogy ha Kovács tanár úr eljön velünk az osztálykirándulásra, akkor hegyet fogunk mászni. Biztosan tudjuk azt is, hogy hegyet fogunk mászni. Igaz-e, hogy Kovács tanár úr eljön velünk az osztálykirándulásra?

a) biztos, hogy nem igaz
b) valószínű, hogy nem igaz
c) egyforma valószínűséggel lehet igaz is, meg nem igaz is
d) valószínű, hogy igaz
e) biztos, hogy igaz

- Tudjuk, hogy ha Évi kettesre áll matekból, akkor egész délután otthon tanul. Biztosan tudjuk azt is, hogy Évi nem áll kettesre matekból. Igaz-e, hogy nem egész délután tanul otthon?

a) biztos, hogy nem igaz
b) valószínű, hogy nem igaz
c) egyforma valószínűséggel lehet igaz is, meg nem igaz is
d) valószínű, hogy igaz
e) biztos, hogy igaz

GONDOLKODTATÓ FELADATOK II.
B változat

Név: .... Osztály: ....

Iskola: ....

4	4						

Ezen a feladatlapon olyan feladatokkal találkozol, amelyekhez hasonlók csak ritkán fordulnak elő az iskolában. Néhány esetben az iskolában tanult ismereteket kell felhasználnod, de van olyan feladat, amikor a te saját ötletedre, egyéni gondolataidra kell támaszkodnod. Minden feladatot figyelmesen olvass el, és válaszolj legjobb tudásod szerint! Igyekezz úgy beosztani az idődet, hogy minden feladatot meg tudj oldani!

1. Bizonyítsd be, hogy három páratlan szám szorzata páratlan szám!

2. Egy képzeletbeli város lakói három csoportba tartoznak: vannak köztük igazmondók, akik mindig igazat mondanak; vannak hazugok, akik mindig hazudnak; és vannak felemások, akik felváltva mondanak igaz és hamis mondatokat. Egy éjszaka csöng a tűzoltóság telefonja, és a következő párbeszéd hangzik el:

Tűzoltó: *Tessék, tűzoltóság.*
Telefonáló: *Ég a városháza.*
Tűzoltó: *Igazmondó vagy?*
Telefonáló: *Felemás vagyok.*

Ég-e a városháza? Válaszodat indokold!

3. A detektív maga elé rakta a nyomozás eredményeit tartalmazó feljegyzéseit. A következő mondatok voltak a papíron:

Ha a tettes ott járt az étteremben, akkor kifizette a számlát.
A gyanúsított nem fizette ki a számlát.

Mire következtetett ebből a két mondatból a detektív?

1. Olvasd el figyelmesen a következő szöveget!

Egy állatkerti séta alkalmából Feri azt kérdezte a nagyapjától:
- Miért van olyan hosszú nyaka a zsiráfnak?
- Hogy könnyen elérje a legmagasabb fák lombját is - hangzott a válasz.
- És miért olyan magasak azok a fák?
- Hogy a zsiráfnak ne kelljen lehajolnia, ha enni akar - mondta a nagyapa.

Mi a véleményed a nagyapa válaszairól?

. Azt szeretnénk megmutatni, hogy Kinga okos. Olvasd el, mit mondott Anna és Balázs!

Anna: *„Aki fejben ki tudja számolni, hogy mennyi 15-ször 25, az okos. Kinga fejben ki tudja számolni, hogy mennyi 15-ször 25, tehát Kinga okos."*
Balázs: *„Aki nem okos, az nem tudja fejben kiszámolni, hogy mennyi 15-ször 25. Kinga fejben ki tudja számolni, hogy mennyi 15-ször 25, tehát Kinga okos."*

Szerinted a két vélemény közül melyik alkalmas annak bizonyítására, hogy Kinga okos? **Tégy X jelet a megfelelő négyzetbe!**

	hibátlan	nem hibátlan, de nem is teljesen rossz	teljesen rossz
Anna bizonyítása	☐	☐	☐
Balázs bizonyítása	☐	☐	☐

. Ebben a feladatban egyszerű, hétköznapi eseményekről lesz szó. Olvasd el figyelmesen a mondatokat, majd döntsd el, hogy szerinted mennyire helyes a következtetésünk! **Karikázd be azt az egy betűt, amelyikhez** tartozó válasz a legpontosabban kifejezi a véleményedet!

- Tudjuk, hogy ha Peti megkapja a zsebpénzét, akkor este moziba megy. Biztosan tudjuk azt is, hogy este moziba megy. Igaz-e, hogy megkapja zsebpénzét?

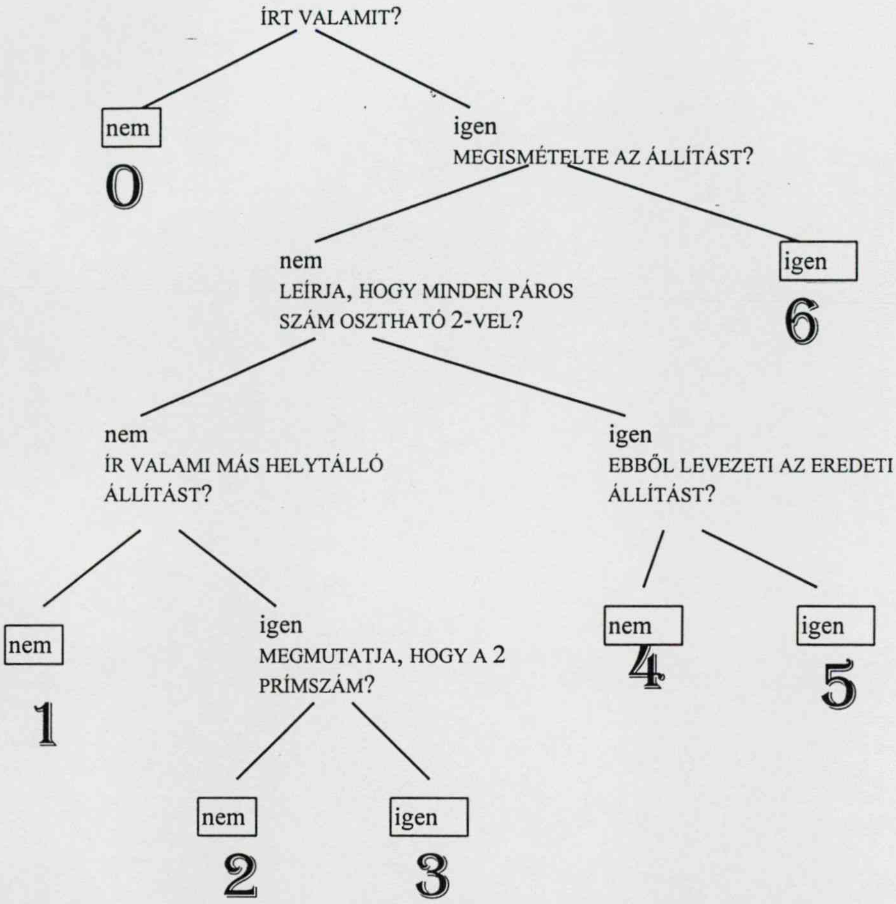
  a) biztos, hogy nem igaz
  b) valószínű, hogy nem igaz
  c) egyforma valószínűséggel lehet igaz is, meg nem igaz is
  d) valószínű, hogy igaz
  e) biztos, hogy igaz

- Tudjuk, hogy ha fúj a szél, akkor megrendezik a vitorlásversenyt. Biztosan tudjuk azt is, hogy nem fúj a szél. Igaz-e, hogy nem rendezik meg a vitorlásversenyt?

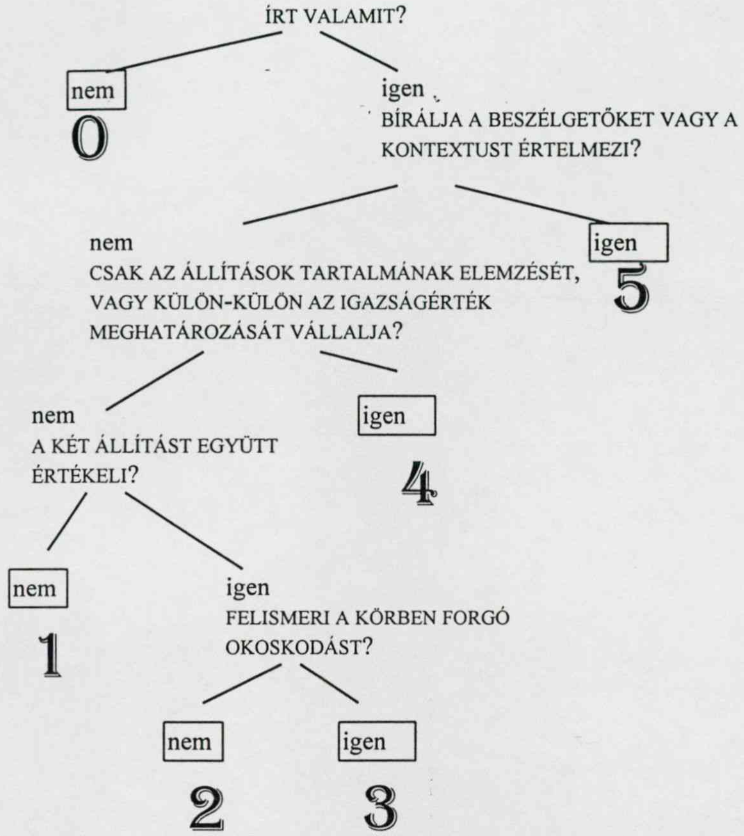
  a) biztos, hogy nem igaz
  b) valószínű, hogy nem igaz
  c) egyforma valószínűséggel lehet igaz is, meg nem igaz is
  d) valószínű, hogy igaz
  e) biztos, hogy igaz

elófelmérés bizonyítási képesség tesztfeladatainak nominális kategóriái

„2 az egyetlen páros prím”



ai fiatalok”, „zsiraf”



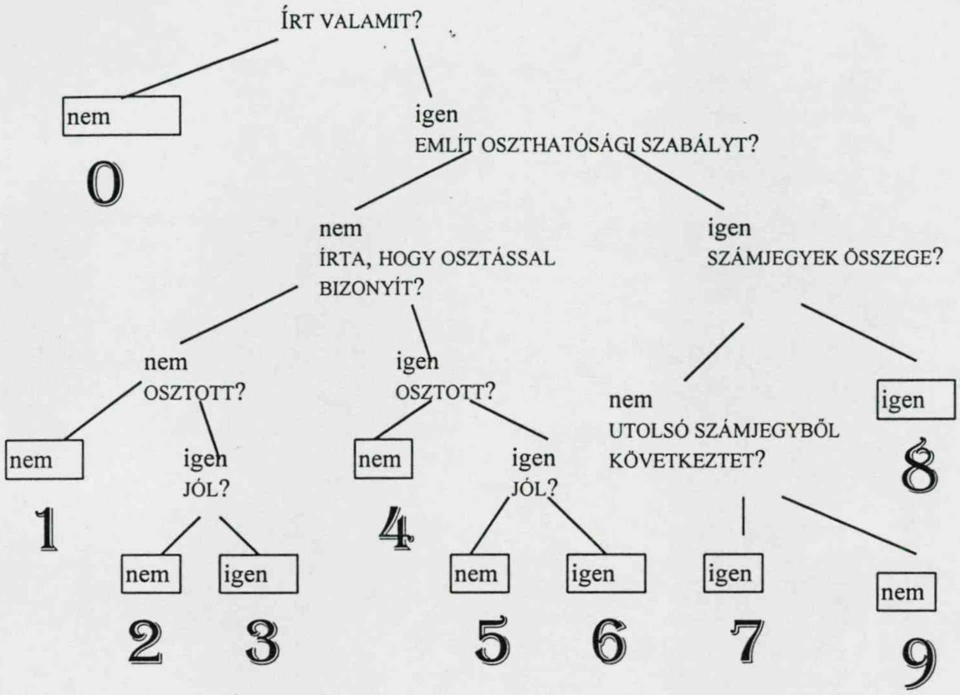
kus válaszok:

	zsiráfos	mai fiatalok
		„Ez egy vicc”
		„Nincs benne logika” vagy „Igazak”.
		„az utolsó kérdésre a válasza az volt, amit először kérdezett a kérdező” vagy „Olyan ez, mint hogy mi volt előbb, a tyúk vagy a tojás”
	„A fák legtöbbször magasak, és a zsiráfok alkalmazkodtak hozzá”	„Nem igaz a válasz, mert a mai fiatalok szeretik a magnót hangosan hallgatni”.
	„Az unoka nagyon kíváncsi”	„Akik itt beszélgettek, feltehetően nem tudták, hogy mi a helyes válasz”

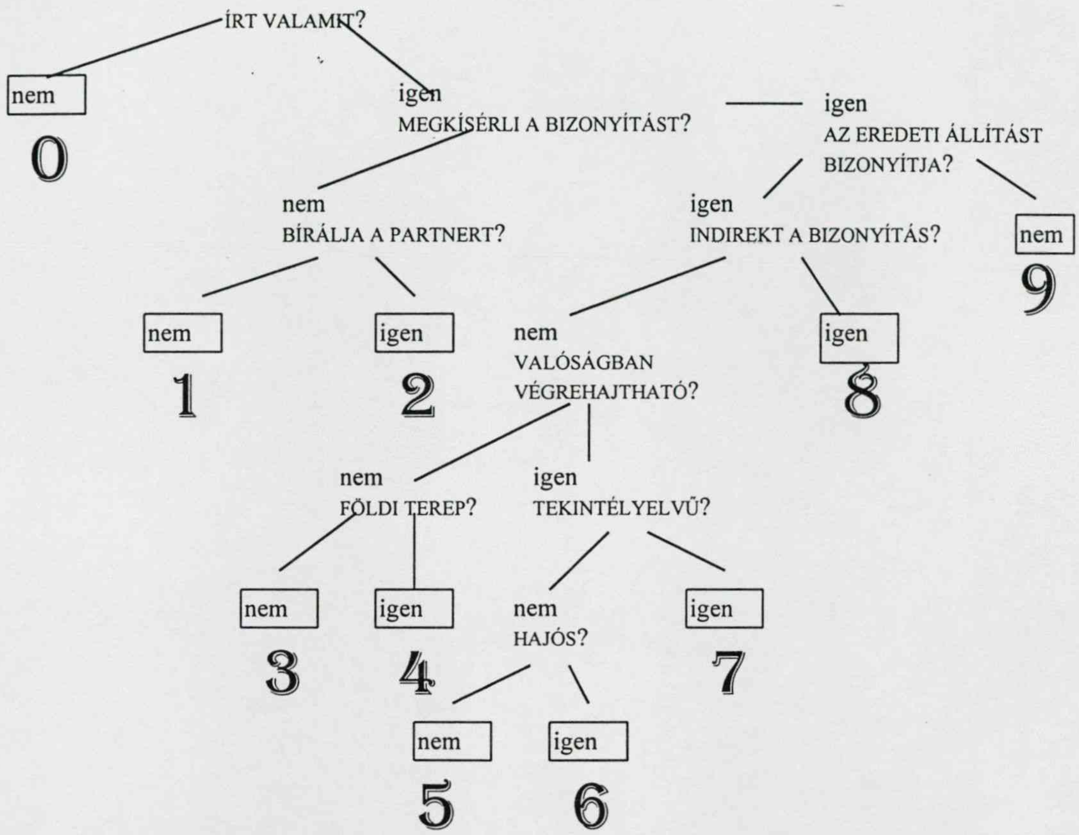
etektív”


ÍRT VALAMIT?
nem
0
igen
MEGISMÉTLI AZ ELSŐ ÁLLÍTÁS VALAMELYIK TAGMONDATÁT?
nem
MEGISMÉTLI A MÁSODIK ÁLLÍTÁST?
igen
7
nem
TETTES-GYANÚSÍTOTT VISZONYRÓL SZÓL?
igen
6
nem
KONTEXTUÁLIS GYAKORLATIAS KÖVETKEZTETÉS?
igen
AZONOSÍTJA ŐKET?
nem
1
igen
2
nem
CÁFOLJA AZONOSSÁGUKAT?
igen
5
nem
3
igen
4

-mal oszthatóság”

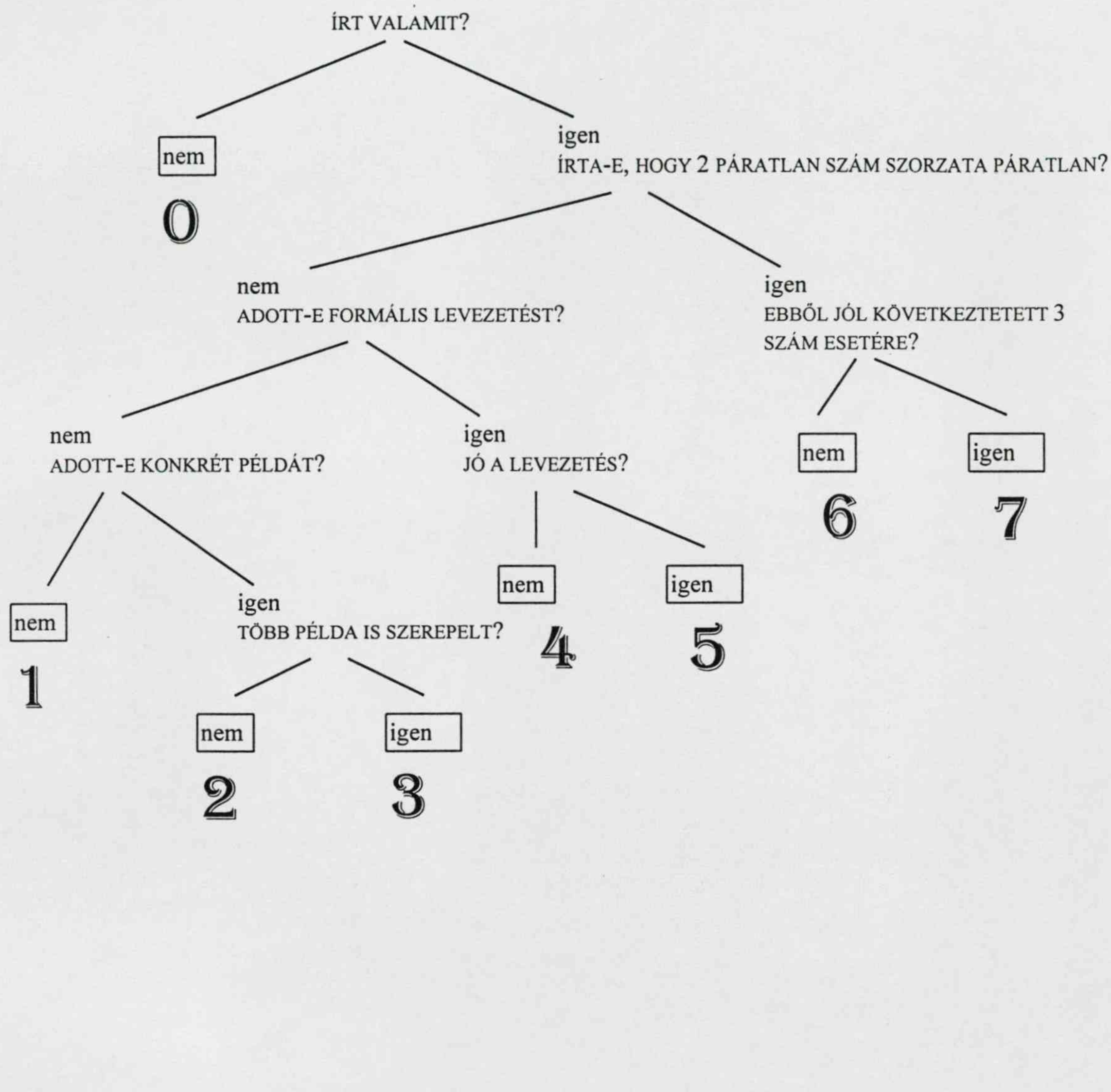


„Gömbölyű Föld”

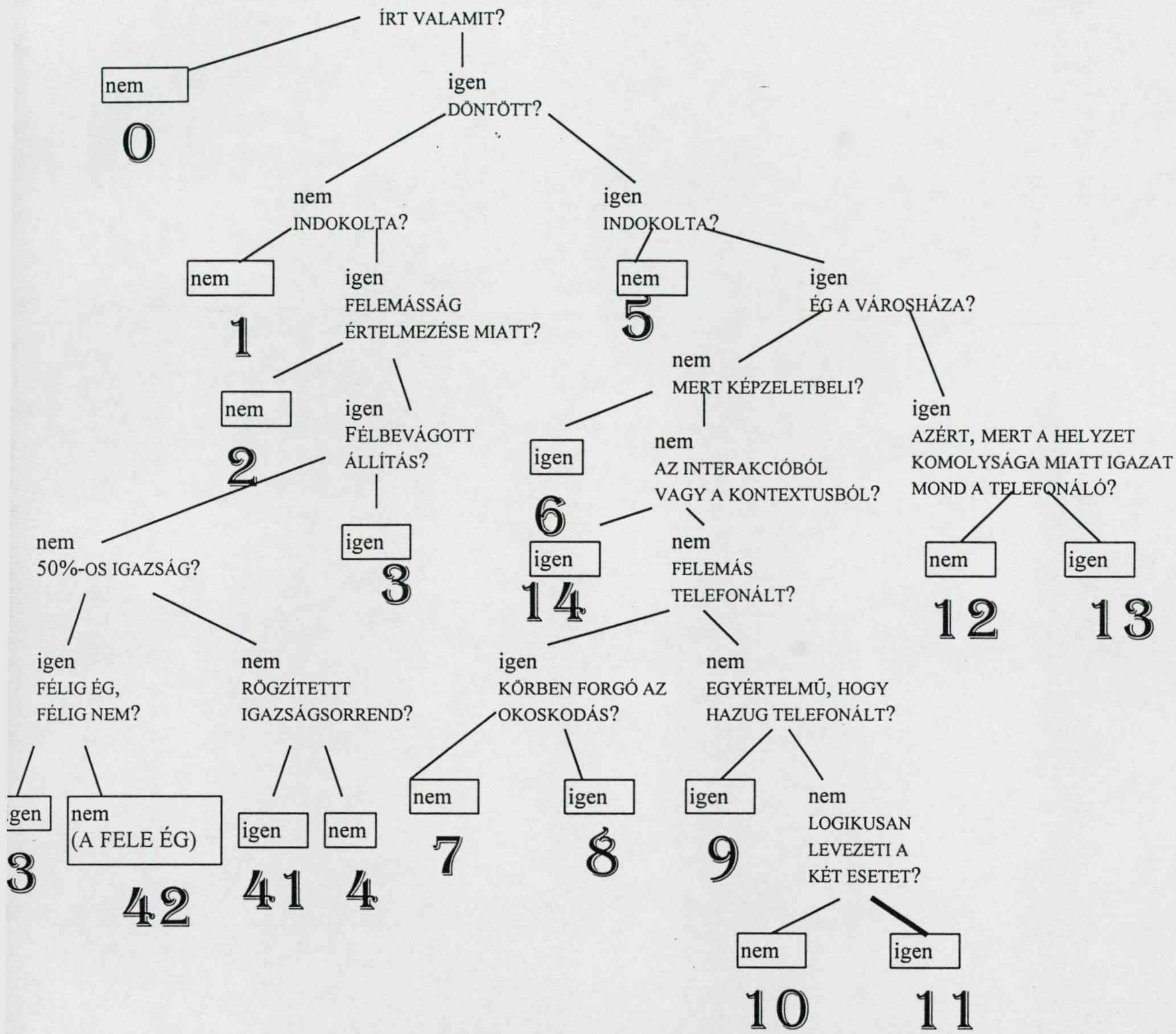


1 „Aki nem hiszi el, nézze meg”
2 „Sehogy! Ha nem hiszi, az ő baja”
3 „Kiviszem a világűrbe és megmutatom”
4 „El kell menni vele és körbeutazni a Földet”
5 „Különböző szögben érik a napsugarak a Földet”
6 „A közeledő hajónak először az árboca látszik...”
7 „Megmutatok neki egy földrajz atlaszt vagy egy földgömböt”
8 „Úgy hogy ha a Föld nem lenne gömb alakú, és négyzet lenne...”
9 „Dobjon egyenesen egy követ. Utána próbálja megmagyarázni, miért esett le”

Három páratlan szám szorzata páratlan”



g-e a városháza?"



„Nem tudni"
„Ezt nem lehet tudni, mert ha ég, akkor igazmondó telefonált, ha nem ég, akkor hazug telefonált"
„Lehet, hogy nem a városháza ég" vagy „Valami van a városházával, de nem biztos, hogy ég"
„Éghet is meg nem is, mert a telefonáló mikor azt mondta, hogy ő felemás, akkor is hazudhatott"
„Igen" vagy „Nem"
„Nem ég, mert a város képzeletbeli"
„Nem, mert a felemások nem mondanak igazat"
„Nem ég, mert felváltva mond igazat, hamisat"
„Nem ég, mert hazudott és hamis telefonált"
0 „Nem ég, mert a telefonáló nem mondja, hogy igazmondó"
1 (logikus levezetés)
2 „Ég, mert mondhat igazat is"
3 „Ég, mert ilyennel nem szoktak viccelődni"
4 „A városháza nem ég, mert akkor többen is telefonálnának, mivel általában a főutcán található a városháza"
1 „Először igazat mond, és aztán hazudik, hogy felemás"
2 „Csak a városháza fele ég"
3 „Lehet, hogy még nem ég a városháza, csak meggyulladt"

„Ég-e a városháza?”

dichotóm kód	rangskálás kód
0	0
1	1
2	1
3	1
4	1
5	1
6	2
7	1
8	1
9	1
10	1
11	3
12	2
13	2
14	2
41	1
42	1
43	1

„Gömbölyű Föld”

dichotóm kód	rangskálás kód
0	0
1	1
2	1
3	2
4	2
5	2
6	2
7	1
8	3
9	1

„A 2 az egyetlen páros prím”

dichotóm kód	rangskálás kód
0	0
1	1
2	1
3	2
4	2
5	3
6	1

„Három páratlan szám szorzata páratlan”

dichotóm kód	rangskálás kód
0	0
1	1
2	2
3	2
4	1
5	3
6	2
7	3

„3-mal oszthatóság”

dichotóm kód	rangskálás kód
0	0
1	1
2	1
3	2
4	2
5	2
6	2
7	1
8	3
9	1

lőfelmérés matematikatanári kérdőíve

NYÍTÁSTÍPUSOK ÉRTÉKELÉSE MATEMATIKATANÁROK VÉLEMÉNYE ALAPJÁN

t Kolléga!
etkező feladatokat sok száz diák oldotta meg tavaly tavasszal, amikor „Gondolkodtató feladatok" elnevezésű tesztünkkel a bizonyítási éget vizsgáltuk. Ezen a kérdőíven a feladatokra adott leggyakoribb választípusok szerepelnek. Azt kérjük Öntől, hogy ötfokozatú skálán rozza az egyes válaszokat. Közreműködését köszönjük!

yan lehet bebizonyítani, hogy ha 6332-t elosztjuk 3-mal, akkor nem egész számot kapunk?

, hogy elosztjuk. 6332:3=2110,666	1	2	3	4	5
, hogy elosztjuk.	1	2	3	4	5
összeadjuk a számjegyeket 14-et kapunk, az pedig nem osztható hárommal.	1	2	3	4	5
2:3=2110, maradt a 2.	1	2	3	4	5
utolsó számjegy nem osztható 3-mal.	1	2	3	4	5

y képzeletbeli város lakói három csoportba tartoznak: vannak köztük igazmondók, akik mindig igazat mondanak; vannak ok, akik mindig hazudnak; és vannak felemások, akik felváltva mondanak igaz és hamis mondatokat. Egy éjszaka csöng a óság telefonja, és a következő párbeszéd hangzik el:

Tűzoltó: Tessék, *tűzoltóság*.
Telefonáló: Ég a városháza.
Tűzoltó: Igazmondó vagy?
Telefonáló: Felemás vagyok.

et is, meg nem is, mert felemás telefonált.	1	2	3	4	5
m ég, mert ha hazug, akkor mindkétszer hazudik, ha felemás, akkor másodszor igazat, tehát először akkor is hazudik. Igazmondó nem lehetett.	1	2	3	4	5
a városháza, mert ilyen dologgal nem viccel senki.	1	2	3	4	5
m ég a városháza, mert hazug telefonált.	1	2	3	4	5
m ég, mert a telefonáló felemás volt, és először hazudott, mert másodszor mondott , hogy ő felemás.	1	2	3	4	5
n ég, mert ez csak egy képzeletbeli város.	1	2	3	4	5

emberek sokáig nem tudták, hogy a Föld, amelyen élünk, gömb alakú. Hogyan tudnánk bebizonyítani, hogy a Föld gömb alakú, lyan embernek, aki ezt nem hiszi el?

y, hogy ha a Föld nem lenne gömb alakú, és kocka lenne, akkor a szélén le lehetne	1	2	3	4	5
y, hogy elmegyünk vele egy Föld körüli útra.	1	2	3	4	5
kell vinni az űrbe, ahonnan már látszik, hogy a Föld gömb alakú.	1	2	3	4	5
egy hajó távolodik a kikötőből, akkor először az egész hajó látszik, de aztán csak oc, majd eltűnik az egész.	1	2	3	4	5
itatnék neki egy atlaszt.	1	2	3	4	5

onyítsd be, hogy a 2 az egyetlen páros prímszám!

nden páros szám osztható 2-vel, ezért a 2 az egyetlen páros prímszám.	1	2	3	4	5
többi páros szám osztható az 1-en és önmagán kívül 2-vel is, tehát nem lehet szám. A 2 viszont csak eggyel és önmagával osztható.	1	2	3	4	5
2 az prímszám, mert csak eggyel és önmagával osztható.	1	2	3	4	5
2 páros szám.	1	2	3	4	5
2 az egyetlen páros prímszám!	1	2	3	4	5

zonyítsd be, hogy három páratlan szám szorzata páratlan szám!

ít páratlan szám szorzata páratlan, ha azt újra páratlannal szorozzuk, még mindig lan számot kapunk.	1	2	3	4	5
ldául $3\cdot5\cdot9=135$	1	2	3	4	5
két páratlan számot összeszorzunk, akkor az eredmény is páratlan lesz.	1	2	3	4	5
$1\cdot3=3$ $1\cdot3\cdot5=15$	1	2	3	4	5
$n+1)(2n+3)(2n+5)=8n^3+26n^2+40n+15$ rom páros és egy páratlan szám összege jött ki, ami páratlan.	1	2	3	4	5
$k+1)(2m+1)(2n+1)=2(4kmn+2km+2kn+2mn+k+m+n)+1$ y páros és egy páratlan szám összege jött ki, ami páratlan. ($Z \ni k, m, n$)	1	2	3	4	5

ıgymintás mérés „Bizonyítási feladatok" tesztje

f Attila Tudományegyetem
Képességkutató Csoport

A gondolkodás fejlődése
Felmérés – 1999 május

BIZONYÍTÁSI FELADATOK

.... Osztály: ....

a: ....

2	0						

a feladatlapon matematikai állításokkal találkozol. Mindegyikhez öt különböző tanuló bizonyítását adtuk meg. Most eld azt, hogy te vagy a tanár, akinek osztályoznia kell a tanulók válaszait! Ötöst adsz a kiváló bizonyításra, négyest a jó ıyításra és így tovább. A táblázat oszlopaiban karikázd be a véleményedet legpontosabban kifejező 1, 2, 3, 4 vagy 5 ıjegyet! Minden feladat végén találsz még további két kérdést. Ezeknél a megfelelő betűjelet karikázd be, illetve a lra írd válaszodat!

ıztlap megoldásához az egész óra rendelkezésedre áll. Jó munkát!

.adat: ***A 2 az egyetlen páros prímszám.***

	a Te osztályzatod
zonyítás: 'en x a legkisebb páros prímszám. Ha x=2, akkor állításunkat bizonyítottuk. Ha x≠2, ır az nem lehetséges, mert x-nél kisebb prímszám nincs. x-nél nagyobb sem lehet, ; az már nem lenne a legkisebb.	1 2 3 4 5
zonyítás: tényleg prímszám, mert csak 1-gyel és önmagával osztható. Érdekes dolog, hogy s másik prímszám, amelyik páros. De az is igaz, hogy nincs másik páros szám, lyik prím, csak a 2.	1 2 3 4 5
zonyítás: tényleg prímszám, mert csak 1-gyel és önmagával osztható. A páros számok között s másik prím, mert a többi páros szám mind osztható 2-vel is, és akkor már nemcsak el és önmagával osztható, hanem legalább még egy számmal.	1 2 3 4 5
zonyítás: 'alóban igaz. A 2 az egyetlen páros prímszám. A múlt órán tanultuk ezt a tételt, és a latok megoldásakor sokszor fölhasználható. Ez egy valóban fontos matematikai nyítás.	1 2 3 4 5
zonyítás: yük fel, hogy van másik prímszám is, amelyik páros. Ez nem lehet, mert a ıszámok nem lehetnek páros számok, mert az kizáró ok. A prímszámokra éppen az ımző, hogy nem páros számok, hanem páratlan számok. Van olyan páratlan, amelyik n, de ott sem mindegyik. A páros számok között a 2 az egyedüli, amelyik prím lehet, sak azért, mert olyan kicsi szám.	1 2 3 4 5

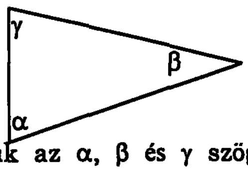
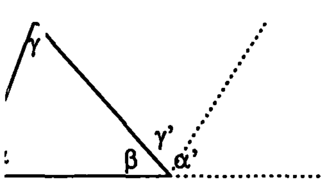
llítás, amit a tanulók bizonyítottak,

a) mindenki számára nyilvánvaló
b) néhány tanulónak nem nyilvánvaló
c) sokak számára nem nyilvánvaló

a) feltétlenül bizonyítani kellett.
b) hasznos volt, hogy bizonyítottuk.
c) nem volt szükség bizonyításra.

ıem láttad volna az ötféle bizonyítást, és neked kellett volna bizonyítást adnod az állításra, akkor a válaszod melyik bizonyításra hasonlítana ıkább? ______________

adat: ***A háromszög belső szögeinek összege 180⁰.***

	a Te osztályzatod
:onyítás: ıkönyvben szerepel ez a tétel, és ott megtalálható a bizonyítás is. Az órán a tanár is ndta. Nem kell bizonyítani, mert nyilvánvalóan igaz a tétel.	1 2 3 4 5
:onyítás: ɔljunk egy tetszőleges háromszöget:  megmérjük az α, β és γ szögeket, az összegük mindig 180⁰ lesz. A háromszög ,őleges volt, ezért az állítás igaz.	1 2 3 4 5
zonyítás: :-szel jelöljük a 180 fokot, akkor 2x lesz a teljes szög. A teljes szöget három részre ʼa 120 fokot kapunk, ami $\frac{2x}{3}$. 120 fokos szögekből nem lehet háromszöget csinálni, db 60 fokosból már igen. A 60 fokos szög fele a 120 fokosnak, vagyis $\frac{2x}{6}$. Háromszor fokos szög ezért $\frac{2x}{2}$. Kettővel lehet egyszerűsíteni. Marad x, ami éppen 180 fokot t.	1 2 3 4 5
zonyítás: ʼük fel, hogy nem 180 fok a belső szögek összege. Ha mondjuk 181 fok lenne, akkor ɔnt nem lehet háromszög, mert kimarad 1 szög, amit valahová be kell illeszteni. ɣis ekkor már négyszög lenne, és nem háromszög.	1 2 3 4 5
zonyítás: tetszőleges háromszöget vegyünk. B-n keresztül párhuzamost húzunk AC-vel.  α = α', mert egyállású szögek γ = γ', mert váltószögek α' + γ' + β együtt a síkszöget adják, ami 180°.	1 2 3 4 5

llítás, amit a tanulók bizonyítottak,

a) mindenki számára nyilvánvaló
b) néhány tanulónak nem nyilvánvaló
c) sokak számára nem nyilvánvaló

a) feltétlenül bizonyítani kellett.
b) hasznos volt, hogy bizonyítottuk.
c) nem volt szükség bizonyításra.

ıem láttad volna az ötféle bizonyítást, és neked kellett volna bizonyítást adnod az állításra, akkor a válaszod melyik bizonyításra hasonlítana ıkább? ____________________

ıdat: ***Három páratlan szám szorzata mindig páratlan.***

	a Te osztályzatod
onyítás: ; igaz a tétel, mert 3 db páratlan számot szorzunk össze. Meg kell nézni sorra en darabszámra. 1 páratlan számot önmagával összeszorozva páratlant kapunk, 't önmagával szorozva szintén, és így folytatható tovább. Úgy is mondhatjuk, hogy :lan darab páratlan számot összeszorozva páratlan számot kapunk.	1 2 3 4 5
:onyítás: tétel nem szerepelt a tankönyvben, ezért a leghelyesebb megnézni néhány példát. əlég sokat megnéztünk, akkor elfogadhatjuk, mert attól, hogy nincs benne a vben, még igaz lehet, de akkor alaposabban meg kell vizsgálni.	1 2 3 4 5
:onyítás: en a három tetszőleges páratlan szám x+1, y+1 és z+1. Ekkor a szorzatuk: $)(y+1)(z+1)=(xy+x+y+1)(z+1)= xyz+xy+xz+x+yz+y+z+1=xyz+xy+xz+yz+x+y+z+1$ ím 1-re végződik, ezért biztosan páratlan.	1 2 3 4 5
zonyítás: $\cdot 1 = 1, \quad 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27, \quad 1 \cdot 3 \cdot 5 = 15$:hány példát is megnéznénk, mindig páratlan számot kapunk. Nemcsak azt kell ıi, amikor vannak egyforma számok is a szorzótényezők között, hanem azt is, amikor legyik különböző. De az előbb olyanra is láttunk példát, ezért a tétel igaz.	1 2 3 4 5
zonyítás: két páratlan számot összeszorzunk, akkor páratlan számot kapunk. (Ez azért van, t a prímtényezős felbontásban egyikben sincs benne a 2, így a szorzatukban sincs ıe.) Ha három páratlan számot szorzunk össze, azt úgy lehet tekinteni, hogy először eszorzunk kettőt, ami páratlant ad, és ezt a páratlant szorozzuk össze a harmadik ıtlan számmal, ami újra csak két páratlan szám összeszorzását jelenti.	1 2 3 4 5

llítás,
amit a tanulók bizonyítottak,

a) mindenki számára nyilvánvaló
b) néhány tanulónak nem nyilvánvaló
c) sokak számára nem nyilvánvaló

a) feltétlenül bizonyítani kellett.
b) hasznos volt, hogy bizonyítottuk.
c) nem volt szükség bizonyításra.

.em láttad volna az ötféle bizonyítást, és neked kellett volna bizonyítást adnod az állításra, akkor a válaszod melyik bizonyításra hasonlítana ıkább?____________________

ıdat: ***Az olyan számok, amelyek 9362... számjegyekkel kezdődnek, és utána csupa 0 áll, nem oszthatók 3-mal.***

	a Te osztályzatod
ɔnyítás: ommal oszthatóság szabálya szerint azok a számok oszthatók 3-mal, amelyekben a egyek összege 3. Az ilyen számokban a számjegyek összege 9+3+6+2=20. A 20 nem ató 3-mal, ezért az eredeti szám sem, mindegy, hány 0 van még a 2 után.	1 2 3 4 5
ɔnyítás: ll számolni:) : 3 = 3120,66... 936200 : 3 = 31200,66...)00 : 3 = 312000,66... ig ugyanaz a szám jön ki, csak eggyel több 0 van benne. A hárommal való atóságot az dönti el, hogy van-e maradék. Mindig van, ezért az állítás igaz.	1 2 3 4 5
onyítás:)000...0000 : 3 = 3120 + 2000...000 : 3 attól függ, hány 0 van az osztandóban redmény nem egész szám, mert 20-ban nincs meg a 3 maradék nélkül, amikor dtem az osztást.	1 2 3 4 5
:onyítás: ıem lehet még a számológépbe sem beütni az osztást. Írásban sem lehet elosztani, nem tanultuk. Ezt úgy lehetne bizonyítani, hogy írunk egy számítógépes programot, yik tud olyan számokkal osztani, amelyikben nem tudjuk pontosan, hogy hány ıjegy van. Szerintem ezt középiskolában fogjuk majd tanulni, és akkor fogjuk majd ıyítani az órán.	1 2 3 4 5
zonyítás: ük fel, hogy osztható 3-mal. Ekkor létezik egy egész szám, amivel visszaszorozva kell kapni az eredetit. Ha ilyen számot találunk, az azt jelenti, hogy osztható, pedig osztható. Annyi a feladat, hogy találjunk ilyen számot, de ez lehetetlen. Ha nem unk, akkor viszont igaz az állítás. Vagyis igaz.	1 2 3 4 5

lítás,
amit a tanulók bizonyítottak,

a) mindenki számára nyilvánvaló
b) néhány tanulónak nem nyilvánvaló
c) sokak számára nem nyilvánvaló

a) feltétlenül bizonyítani kellett.
b) hasznos volt, hogy bizonyítottuk.
c) nem volt szükség bizonyításra.

em láttad volna az ötféle bizonyítást, és neked kellett volna bizonyítást adnod az állításra, akkor a válaszod melyik bizonyításra hasonlítana kább?____________________

BIZONYÍTÁSI FELADATOK
Kérdőív

.... Osztály: ....

ı: ....

ı lapon matematikai bizonyításokkal kapcsolatos 10 állítás értékelésére kérünk. Gondold át, hogy az egyes állítások közül melyikkel értesz illetve melyikkel nem, és a véleményedet ötfokú skálán jelöld az alábbi számjegyek felhasználásával:

-2: nagyon nem értek egyet; -1: nem értek egyet; 0: közömbös; 1: egyetértek; 2: nagyon egyetértek

Állítás	a Te véleményed
ı egy matematikai tételt bebizonyítottak, akkor biztos ıetek abban, hogy a tétel igaz.	-2 -1 0 1 2
matematikai bizonyítások megmagyarázzák *és* igazolják t, ami igaz.	-2 -1 0 1 2
a megpróbálok magam bizonyítani egy tételt, akkor az segít, ›gy meggyőződjek róla: a tétel igaz.	-2 -1 0 1 2
önnyebb cáfolni valamit, mint igazolni.	-2 -1 0 1 2
a megpróbálok bizonyítani egy sejtést, az megváltoztathatja ileményemet annak igazságértékéről.	-2 -1 0 1 2
a egy tétel nyilvánvalóan igaz, akkor nincs értelme zonyítani.	-2 -1 0 1 2
gy matematikai tétel igazsága más matematikai tényektől ıgg.	-2 -1 0 1 2
a valami a tapasztalat alapján nyilvánvaló, az soha nem ıagyarázza meg, hogy miért kell az állításnak igaznak lennie.	-2 -1 0 1 2
a egy tételnek több bizonyítását látom, az segít jobban ıegérteni a tételt.	-2 -1 0 1 2
bizonyítások néha kétes érvényességű trükköket ırtalmaznak.	-2 -1 0 1 2

Köszönjük, hogy kitöltötted ezt a tesztlapot. További matematikai tanulmányaidhoz sok sikert kívánunk!

ıgymintás mérés „Gondolkodtató feladatok" tesztje

f Attila Tudományegyetem
Képességkutató Csoport

GONDOLKODTATÓ FELADATOK

.... Osztály: ....

a: .... | 3 | 0 | | | | | | |

a feladatlapon különböző állításokkal találkozol. Az első két feladatban öt különböző tanuló bizonyítását adtuk meg. képzeld azt, hogy te vagy a tanár, akinek osztályoznia kell a tanulók válaszait! Ötöst adsz a kiváló bizonyításra, ɘst a jó bizonyításra és így tovább. A táblázat oszlopaiban karikázd be a véleményedet legpontosabban kifejező 1, 2, 3, 4 5 számjegyet!

ztlap megoldásához az egész óra rendelkezésedre áll. Jó munkát!

adat: **A Föld gömbölyű.**

	a Te osztályzatod
zonyítás: mes megnézni egy földgömböt vagy világatlaszt. Ha ez még nem lenne elég, meg kell kérdezni öldrajztudóst, aki biztosan szépen el tudná mondani, hogy miért gömbölyű a Föld.	1 2 3 4 5
zonyítás: gömbölyű a Föld, akkor a középponttól minden pont x távolságra van. De például a nolungma teteje x+8848 méterre van, a Mariana-árok meg x-11000 méterre. Ha minden pontot negmérünk, és átlagban kijön egy x, akkor gömbölyűnek mondható a Föld, ha nem, akkor nem.	1 2 3 4 5
zonyítás: ımbről már a régi görögök is azt mondták, hogy tökéletes. A Föld is tökéletes, ezért a Föld bölyű. Ez a lehető legegyszerűbb bizonyítás.	1 2 3 4 5
zonyítás: éle módon is lehet: Vagy elmegyünk egy világkörüli útra, és ha mindig ugyanarra megyünk, ɔr visszaérünk a kiindulási pontra. Vagy kimegyünk egy nagy mezőre, és körülnézünk. Mivel a zont körbe-körbe kör alakú, ez azt bizonyítja, hogy a Föld gömbölyű.	1 2 3 4 5
zonyítás: öld bármely tengeri kikötőjéből azt láthatjuk, hogy a bármely irányból közeledő hajónak először ırboca jelenik meg, aztán a vitorla többi része, és végül a hajótest. Ettől persze a Föld még tne tojás alakú is. De az is igaz, hogy ha a hajó egyenletes sebességgel jön, akkor egyenletesen :e többet látunk belőle. Ez viszont már csak gömb esetén igaz.	1 2 3 4 5

llítás, amit a tanulók bizonyítottak,

a) mindenki számára nyilvánvaló
b) néhány tanulónak nem nyilvánvaló
c) sokak számára nem nyilvánvaló

a) feltétlenül bizonyítani kellett.
b) hasznos volt, hogy bizonyítottuk.
c) nem volt szükség bizonyításra.

ıem láttad volna az ötféle bizonyítást, és neked kellett volna bizonyítást adnod az állításra, akkor a válaszod melyik bizonyításra hasonlítana ıkább?________________

ıdat: **Egy képzeletbeli város lakói három csoportba tartoznak: vannak köztük igazmondók, akik mindig .t mondanak; vannak hazugok, akik mindig hazudnak; és vannak felemások, akik felváltva mondanak igaz mis mondatokat. Egy éjszaka csöng a tűzoltóság telefonja, és a következő párbeszéd hangzik el:**

Tűzoltó: ***Tessék, tűzoltóság.***
Telefonáló: ***Ég a városháza.***
Tűzoltó: ***Igazmondó vagy?***
Telefonáló: ***Felemás vagyok.***

. után a tűzoltó azt állította, hogy nem ég a városháza, felesleges lenne kivonulni. Hogyan bizonyítható ez lítás?

	a Te osztályzatod
:onyítás: ƺ a városháza, akkor nem igaz az, hogy felemás. Ha nem ég a városháza, akkor lehet felemás. l azt mondta, hogy felemás, ezért az utóbbi a valószínű.	1 2 3 4 5
:onyítás: ég a városháza, mert ilyen komoly dologgal nem lehet viccelni. Aki ezzel tréfát űz, azt jól meg)üntetni. Az iskolában és otthon is azt tanítják, hogy a tűzzel nem szabad játszani.	1 2 3 4 5
zonyítás: ık valószínűsége, hogy ég a városháza, legyen x. Annak valószínűsége, hogy felemás telefonált, ın y. Ha y>x, akkor felemás telefonált. A felemás egyszer igazat mond, egyszer hazudik. cor azt mondta, hogy felemás, akkor igazat mondott. Ezért, amikor azt mondta, hogy ég a sháza, hazudott. Mivel y>x, ezért nem ég a városháza.	1 2 3 4 5
zonyítás: lefonáló nem lehetett igazmondó, mert ha az lett volna, akkor nem mondhatta volna, hogy ıás. 'elemás volt a telefonáló, akkor igazat mondott, mikor azt mondta, hogy felemás, és hazudott, cor azt mondta, hogy ég a városháza. ıazug telefonált, akkor mindkétszer hazudott. Ezért a városháza semmiképpen sem ég.	1 2 3 4 5
zonyítás: rük fel, hogy ég a városháza, Ekkor a telefonáló hangja izgatottabb lett volna, ezért nem ég a sháza. Azt azért érdemes lenne tudni, hogy a városlakók között milyen arányban vannak mondók, hazugok, és felemások. Az a probléma, hogy ha csak egyetlen ember is felemás vagy ıg, akkor már esély van arra, hogy feleslegesen riasztják a tűzoltókat.	1 2 3 4 5

llítás, amit a tanulók bizonyítottak,	a) mindenki számára nyilvánvaló b) néhány tanulónak nem nyilvánvaló c) sokak számára nem nyilvánvaló	a) feltétlenül bizonyítani kellett. b) hasznos volt, hogy bizonyítottuk. c) nem volt szükség bizonyításra.

em láttad volna az ötféle bizonyítást, és neked kellett volna bizonyítást adnod az állításra, akkor a válaszod melyik bizonyításra hasonlítana ıkább? ____________________

etkező feladatokban egy különleges mesebeli szigetre, a lovagok és lókötők szigetére látogatunk.

adat: A szigetről szóló útikönyvekben sok érdekes dolgot lehet olvasni. Ebben a feladatban ezekből az érdekes latokból írtunk le néhányat. *Karikázd be a helyes válasz betűjelét!*

a egy lovagnak születésnapja van, akkor a lókötők virágot visznek neki."
gtudták hőseink, hogy az egyik lovagnak ma van a születésnapja. Mire következtettek ebből?

a) A lókötők virágot visznek neki.
b) Nem lehet eldönteni, hogy visznek-e virágot a lókötők.
c) A lókötők nem visznek neki virágot.

a a lókötők focicsapata legyőzi a lovagokét, akkor három napig tartó ünnepséget rendeznek."
gtudták hőseink, hogy a lókötők focicsapata <u>nem</u> győzte le a lovagokét. Mire következtettek ebből?

a) Három napig tartó ünnepséget rendeznek.
b) Nem lehet elönteni, hogy rendeznek-e három napig tartó ünnepséget.
c) Nem rendeznek három napig tartó ünnepséget.

a 25 °C fölött van a hőmérséklet, akkor a lókötők a tengerparti strandon vannak."
gtudták hőseink, hogy a lókötők a tengerparti strandon vannak. Mire következtettek ebből?

a) 25 °C fölött van a hőmérséklet.
b) Nem lehet eldönteni, hogy 25 °C fölött van-e a hőmérséklet.
c) Nincs 25 °C fölött a hőmérséklet.

a a sziget uralkodójának névnapja van, akkor a sziget lakói együtt ünnepelnek."
gtudták hőseink, hogy a sziget lakói <u>nem</u> ünnepelnek együtt. Mire következtettek ebből?

a) A sziget uralkodójának névnapja van.
b) Nem lehet eldönteni, hogy névnapja van-e a sziget uralkodójának.
c) Nincs névnapja a sziget uralkodójának.

adat: Amikor hőseink hazafelé tartottak a különleges szigetről, folyton az ott tapasztaltakról beszélgettek. Többen is azt dták a kapitánynak: „Milyen kár, hogy otthon nem várnak ránk ilyen gondolkodtató feladatok!" A kapitány azonban így : „Hogy megmutassam, ez mennyire nem így van, adok nektek még két feladatot."
a kapitány két feladata:

Hogyan lehet bizonyítani, hogy Magyarország területének jelentős része a Római Birodalom része volt?

Hogyan lehet bizonyítani, hogy Magyarország területének nagy részén 1-2 millió éve még tenger volt?

ıdat: A hazaérkezés előtti utolsó reggelen mindenki a szokásos teáját kortyolgatta. A kapitány beleejtett egy kockacukrot ba, majd beszélgetni kezdett asztaltársaival. Egy kis idő múlva ezt mondta:

– Milyen érdekes, hogy a kockacukor, amit az imént a teába ejtettem, már csaknem feloldódott. Ennél is érdekesebb szerintem az, hogy akármennyi ideig is várnánk itt, soha nem állna össze a teába került cukormennyiség kockacukorrá!

ɔgyan bizonyítanád, hogy a feloldódott kockacukor nem áll össze magától újra kockacukorrá?

adat: Otthon az egyik utazó elmesélte barátainak, hogy amikor kikötöttek a szigeten, már tudták, hogy ha egy szigetlakó a bal vel integet, az azt jelenti, hogy barátságosan fogadja az idegeneket. De amikor láttak egy szigetlakót, aki bal kezével getett, és közben teli torokból kiabált, többen megijedtek. A kapitány azonban így szólt:

– Ha egy szigetlakó a bal kezével integet, és közben teli torokból kiabál, az azt jelenti, hogy barátságosan fogadja az idegeneket.

yan lehetne bizonyítani a kapitány állítását?

ladat: A szigeten a közlekedési lámpák is nagyon furcsán működtek. A szabályzat azt írja: „Ha a lámpa piros színnel gít, akkor nem világít kék színnel." Az egyik szigetlakó azt mondta: „Ha a lámpa piros színnel világít, akkor nem igaz, y rendőr irányítja a forgalmat és a lámpa kék színnel világít". A kapitány szerint a szigetlakó igazat mondott. Hogyan ıtne ezt bizonyítani?

agymintás mérés matematikatanári kérdőíve

f Attila Tudományegyetem
Képességkutató Csoport

MATEMATIKATANÁRI KÉRDŐÍV

ndolkodás fejlődése" című kutatási program keretében idén tavasszal sor kerül a bizonyítási képesség fejlődésének felmérésére is. Ez a ségrendszer sok szállal köthető a matematikához, ezért kíváncsiak vagyunk az Ön véleményére néhány, a matematikai bizonyításokhoz ó kérdésben.

ör tíz állítást sorolunk fel, amelyek matematikai bizonyításokra vonatkoznak. Arra kérjük, ötfokú skálán jelölje meg véleményét azzal olatosan, hogy mi lehet *a matematikából jelessel rendelkező 9., illetve 11. osztályos tanulók* véleménye ezekről az állításokról!

-2: nagyon nem értek egyet; -1: nem értek egyet; 0: közömbös; 1: egyetértek; 2: nagyon egyetértek

Állítás	Ön szerint a matematikából jelessel rendelkezők véleménye					
a egy matematikai tételt bebizonyították, akkor biztos lehetek iban, hogy a tétel igaz.	9. osztály:	-2	-1	0	1	2
	11. osztály:	-2	-1	0	1	2
matematikai bizonyítások megmagyarázzák *és* igazolják azt, ni igaz.	9. osztály:	-2	-1	0	1	2
	11. osztály:	-2	-1	0	1	2
a megpróbálok magam bizonyítani egy tételt, akkor az segít, igy meggyőződjek róla: a tétel igaz.	9. osztály:	-2	-1	0	1	2
	11. osztály:	-2	-1	0	1	2
önnyebb cáfolni valamit, mint igazolni.	9. osztály:	-2	-1	0	1	2
	11. osztály:	-2	-1	0	1	2
a megpróbálok bizonyítani egy sejtést, az megváltoztathatja éleményemet annak igazságértékéről.	9. osztály:	-2	-1	0	1	2
	11. osztály:	-2	-1	0	1	2
a egy tétel nyilvánvalóan igaz, akkor nincs értelme bizonyítani.	9. osztály:	-2	-1	0	1	2
	11. osztály:	-2	-1	0	1	2
gy matematikai tétel igazsága más matematikai tényektől függ.	9. osztály:	-2	-1	0	1	2
	11. osztály:	-2	-1	0	1	2
a valami a tapasztalat alapján nyilvánvaló, az soha nem iagyarázza meg, hogy miért kell az állításnak igaznak lennie.	9. osztály:	-2	-1	0	1	2
	11. osztály:	-2	-1	0	1	2
la egy tételnek több bizonyítását látom, az segít jobban iegérteni a tételt.	9. osztály:	-2	-1	0	1	2
	11. osztály:	-2	-1	0	1	2
bizonyítások néha kétes érvényességű trükköket tartalmaznak.	9. osztály:	-2	-1	0	1	2
	11. osztály:	-2	-1	0	1	2

szerint a gondolkodási képességek fejlesztése szempontjából melyik az iskolai tananyag három legfontosabb matematikai tétele és iyítása?

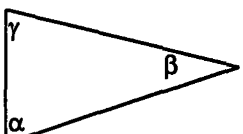
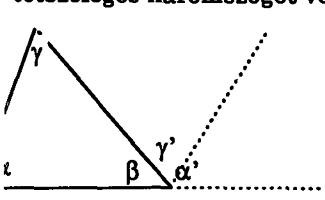
zerint hány éves korban találkozzanak a tanulók először indirekt bizonyítással?__________

zerint hány éves korban kell tudnia egy tanulónak Pitagorasz tételét megfordítani?__________

ábbiakban két feladatot mutatunk be, amelyek megtalálhatók a tanulók matematikai bizonyítási tesztjeiben. Azt ık Öntől, hogy ötfokozatú skálán osztályozza az egyes válaszokat.

emüködését köszönjük!

adat: ***A háromszög belső szögeinek összege 180^0.***

	az Ön osztályzata
zonyítás: ıkönyvben szerepel ez a tétel, és ott megtalálható a bizonyítás is. Az órán a tanár is ndta. Nem kell bizonyítani, mert nyilvánvalóan igaz a tétel.	1 2 3 4 5
zonyítás: oljunk egy tetszőleges háromszöget:  megmérjük az α, β és γ szögeket, az összegük mindig 180^0 lesz. A háromszög :őleges volt, ezért az állítás igaz.	1 2 3 4 5
zonyítás: :-szel jelöljük a 180 fokot, akkor 2x lesz a teljes szög. A teljes szöget három részre va 120 fokot kapunk, ami $\frac{2x}{3}$. 120 fokos szögekből nem lehet háromszöget csinálni, db 60 fokosból már igen. A 60 fokos szög fele a 120 fokosnak, vagyis $\frac{2x}{6}$. Háromszor fokos szög ezért $\frac{2x}{2}$. Kettővel lehet egyszerűsíteni. Marad x, ami éppen 180 fokot t.	1 2 3 4 5
zonyítás: yük fel, hogy nem 180 fok a belső szögek összege. Ha mondjuk 181 fok lenne, akkor ont nem lehet háromszög, mert kimarad 1 szög, amit valahová be kell illeszteni. yis ekkor már négyszög lenne, és nem háromszög.	1 2 3 4 5
zonyítás: tetszőleges háromszöget vegyünk. B-n keresztül párhuzamost húzunk AC-vel.  α = α', mert egyállású szögek γ = γ', mert váltószögek α' + γ' + β együtt a síkszöget adják, ami 180°.	1 2 3 4 5

adat: ***Három páratlan szám szorzata mindig páratlan.***

	az Ön osztályzata
onyítás: : igaz a tétel, mert 3 db páratlan számot szorzunk össze. Meg kell nézni sorra en darabszámra. 1 páratlan számot önmagával összeszorozva páratlant kapunk, it önmagával szorozva szintén, és így folytatható tovább. Úgy is mondhatjuk, hogy tlan darab páratlan számot összeszorozva páratlan számot kapunk.	1 2 3 4 5
zonyítás: tétel nem szerepelt a tankönyvben, ezért a leghelyesebb megnézni néhány példát. elég sokat megnéztünk, akkor elfogadhatjuk, mert attól, hogy nincs benne a vben, még igaz lehet, de akkor alaposabban meg kell vizsgálni.	1 2 3 4 5
zonyítás: en a három tetszőleges páratlan szám x+1, y+1 és z+1. Ekkor a szorzatuk: $)(y+1)(z+1)=(xy+x+y+1)(z+1)= xyz+xy+xz+x+yz+y+z+1=xyz+xy+xz+yz+x+y+z+1$ ám 1-re végződik, ezért biztosan páratlan.	1 2 3 4 5
zonyítás: $\cdot 1 = 1, \quad 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27, \quad 1 \cdot 3 \cdot 5 = 15$ rhány példát is megnéznénk, mindig páratlan számot kapunk. Nemcsak azt kell ii, amikor vannak egyforma számok is a szorzótényezők között, hanem azt is, amikor legyik különböző. De az előbb olyanra is láttunk példát, ezért a tétel igaz.	1 2 3 4 5
zonyítás: két páratlan számot összeszorzunk, akkor páratlan számot kapunk. (Ez azért van, t a prímtényezős felbontásban egyikben sincs benne a 2, így a szorzatukban sincs ie.) Ha három páratlan számot szorzunk össze, azt úgy lehet tekinteni, hogy először eszorzunk kettőt, ami páratlant ad, és ezt a páratlant szorozzuk össze a harmadik itlan számmal, ami újra csak két páratlan szám összeszorzását jelenti.	1 2 3 4 5

ABSTRACT

The aim of the dissertation is to characterize the nature and development of proving ability. Form a pedagogical-psychological point of view, we take both the proof-concepts of other sciences and the results of ability research into account. In philosophy, for about 2500 years a hierarchical system of authoritarian, empirical and deductive proofs has been described. Proofs in mathematics are demonstrations in order to reveal the deducibility of a statement in a finite numbers of steps. In jurisprudence, the basic principle is that proofs must be deductive, nevertheless, there is a great emphasis on inductive processes in the phase of gathering information. Taking into account the results of ability research yielded emphasizing the hierarchical nature of human abilities.

In case of proving ability a three-level hierarchical system of cognitive components seems to explain empirical data and provide a framework for assessment. The strategy-level of proving ability contains Moshman's meta-logic and Johnson-Laird's meta-deduction. The algorithmic level contains forms of reasoning described by classical experimental psychology, among them is deductive reasoning that may have great importance when constructing or analyzing proofs. In this investigation we considered the hardware-level of proving ability as functioning normally in every subjects.

In this investigation for the purpose of educational assessment we used Harel and Sowder's (1998) proof schemes that had been originally developed for mathemtical proofs but could be applicable to non-mathematical content, too. We used five main proof-schemes: authoritarian, ritual, symbolic, empirical, and analytical (deductive) proofs.

There were two pools of data arranged. In the pilot study 2572 students (with ages ranging from 10 to 17 years) solved open-ended tasks of proving ability. 1944 students form 5 counties in Hungary took part in the second pool of data. Two test of proving ability were administered to them, containing both Likert-scale and open-ended tasks. There were additional measurement tools adminsitered that could serve as background variables for the present investigation.

The reliability coefficients of students' proving ability tests were satisfactory. Students' judging of different proof types can be summarized as follows:

a) Authoritarian proofs: This type of proofs is widely accepted among 5th and 7th graders but are strongly rejected in the sample of 9th and 11th graders.

b) Ritual proofs: There can be revealed significant difference between both age-groups, and - within the 9th and 11th graders' group - between grammar school and vocational secondary school students.

c) Symbolic proofs. In every age-group symbolic proofs obtain higher grades than authoritarian and ritual proofs. This can be due to the fact that in a mathematical context the appearance of mathematical symbols in itself may enrise the value of a proof.

d) Empirical proofs. There were quite large differences between empirical proofs of different domains. This can be traced back to the difference in the statements from the aspect of containing or not containing universal quantifier or to difference according to Balacheff's (1988) naiv empiricism and crucial experiment.

e) Deductive proofs. In every domain and also in every age-groups deductive proofs yield the best scores. This means that students even before 5th school are taught to value a certain type of proof. This 'certain' is in our culture the type of deductive proofs.

The difference between age-groups can be characterized as follows:

– Elementary school pupils score to a greater extent medium or high scores to the external proof types.

– Differences between 9th and 11th graders can often be traced back to difference in the content.

– Students of vocational secondary schools are in the middle between elementary and grammar-school students when judging proof types.

Connections between content-familiarity and proof types in case of open-ended tasks has been revealed: if the content is familiar many students feel courage to construct a deductive proof, in spite of the fact that a correct deductive proof would require knowledge about facts and rules that are not known yet.

An index of proving ability developed from Likert scale results has proven to be a reliable and effective measure of the development of proving ability. The curve of the development is similar to the upper branch of normal ogiva. This observation supports the hypothesis that proving ability can be considered an ability also in the psychometric sense of 'ability'.

Students' judges of proof types is a subject of slow changes. Maths teachers are, however optimistic in the question of changes, and they are also in accordance with each other in the question about age-limits of certain processes in the development of proving ability.

Practical considerations about the results of the present investigation may involve emphasizing the importance of 'exploring the territory' before proving a statement. Statistical tendencies revealed by cross-sectional comparisons give advises to text-book and curriculum writers.